



Universidad Autónoma del Estado de México

Centro Universitario UAEM Valle de Chalco

**Entrelazamiento cuántico y fidelidad de un sistema
de dos y tres qubits a través de un Hamiltoniano de
Heisenberg**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

DOCTOR EN CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN

P R E S E N T A

Mtro. Fabián Soberanes Martín

TUTOR ACADÉMICO

Dr. Manuel Ávila Aoki

TUTORA ADJUNTA

Dra. Anabelem Soberanes Martín

TUTOR ADJUNTO

Dr. Juvenal Rueda Paz

VALLE DE CHALCO SOLIDARIDAD, MÉXICO AGOSTO 2020.



CUVCH

***ENTRELAZAMIENTO CUÁNTICO Y
FIDELIDAD DE UN SISTEMA DE DOS Y TRES
QUBITS A TRAVÉS DE UN HAMILTONIANO DE
HEISENBERG***

Índice general

1. Introducción	6
1.1. Objetivos	11
1.1.1. General	11
1.1.2. Específicos	11
1.2. Planteamiento del problema	12
1.3. Contribuciones	13
1.4. Hipótesis	14
2. Marco teórico	16
2.1. Computación cuántica	16
2.1.1. Comunicación cuántica	24
2.2. El Hamiltoniano de Heisenberg	26
2.3. Entrelazamiento cuántico	28
2.3.1. Entrelazamiento en algoritmos cuánticos	32
2.3.2. Entrelazamientos GHZ	33
2.3.3. Concurrencia	34

2.3.4. Tres tangle	35
2.4. Fidelidad cuántica	37
3. Metodología	40
4. Cálculos y Resultados	42
4.1. Entrelazamiento y fidelidad para un sistema de dos qubits	42
4.1.1. Hamiltoniano de Heisenberg y compuerta SWAP	42
4.1.2. Concurrencia para un sistemas de dos qubits	49
4.1.2.1. Concurrencia y fidelidad estados de Bell	65
4.1.2.2. Estados aleatorio	77
4.2. Entrelazamiento para un sistema de tres qubits	85
4.2.1. Tres tangle	86
4.2.1.1. Tres tangle estado GHZ	94
4.2.1.2. Tres tangle estado W	95
4.3. Productos académicos de investigación en el doctorado	98
5. Conclusiones/Trabajos futuros	99
5.1. Conclusiones	99
5.2. Trabajos futuros	104
A. Anexos	111
A.1. Operaciones en Maple	112
A.1.1. Dos qubits	112
A.1.2. Tres qubits	118

A.2. Publicaciones	127
B. Glosario	131
B.1. Glosario	131

Índice de figuras

2.1. Esfera de Bloch	23
2.2. El qubit $ \psi\rangle$ no tiene spin definido.	24
4.1. Estado general compuerta SWAP	47
4.2. Estado 0 compuerta SWAP	47
4.3. Estado 1 y 2 compuerta SWAP	48
4.4. Estado 3 compuerta SWAP	48
4.5. Concurrencia primer estado de Bell	68
4.6. Fidelidad primer estado de Bell	69
4.7. Concurrencia segundo estado de Bell	72
4.8. Concurrencia de primer estado aleatorio	80
4.9. Concurrencia de estado aleatorio 2	83
4.10. Fidelidad de estado aleatorio 2	85
4.11. Probabilidad del sistema de tres qubits para el estado inicial GHZ	94
4.12. Tres tangle del estado inicial GHZ	95
4.13. Probabilidad del sistema de tres qubits para el estado inicial W	96

4.14. Tres tangle del estado inicial W 97

A.1. Sistema de dos qubits 117

A.2. Primera página artículo 1: Reseña de una interpretación de discor-
dia cuántica 128

A.3. Primera página artículo 2: Operador potencia como testigo de la
decoherencia en la ejecución de la compuerta de Toffoli en una
computadora cuántica de diamante 129

A.4. Primera página artículo 3: Execution of Fredkin gate by a set of
free fermions 130

Resumen

En esta investigación, desde el punto de vista computacional, se introdujo la historia del desarrollo de las ciencias de la información y de la computación, los límites físicos que se encuentran hasta el día de hoy en el desarrollo de componentes computacionales, y presentar un posible camino alternativo: la información cuántica y la computación cuántica.

Se realizaron los procesos para obtener las expresiones que permitan calcular la concurrencia y la fidelidad en sistemas de dos y tres qubits, utilizando el Hamiltoniano de Heisenberg y compuertas cuánticas.

Se hicieron pruebas de las expresiones obtenidas con los estados de Bell y dos estados aleatorios para dos qubits los cuales mostraron la evolución en el tiempo de la concurrencia como medida de entrelazamiento cuántico, y la evolución en el tiempo de la fidelidad cuántica. También se hicieron pruebas de las expresiones obtenidas para tres qubits con los estados iniciales GHZ y W para calcular el tres

tangle como medida de entrelazamiento cuántico y su evolución en el tiempo, las cuales mostraron un comportamiento adecuado a cada uno de los estados. El estado inicial GHZ mostró un tres tangle igual a uno y el estado inicial W un tres tangle igual a cero.

Introducción

La computación es la ciencia encargada del estudio de los sistemas computacionales, en específico de las computadoras, las cuales manejan la información de manera automática. El concepto computación proviene del latín *computatio*, que se refiere al cómputo como cuenta. La teoría de la computación es una de las áreas que más se distingue dentro de la ciencia de la computación, en ella se clasifican los problemas según el origen de los algoritmos, los cuales pueden ser simples, complejos, o muy complejos, lo que genera consumo de recursos computacionales. Otro sector de estudio importante es la estructura de los datos, en esta área el análisis matemático resulta elemental para poder obtener datos y manipularlos adecuadamente, si no se hace de forma correcta la información obtenida no será relevante.

No se puede dejar de mencionar a los sistemas operativos, los cuales son la parte de la computadora que interactúa con el usuario. La arquitectura de

computadoras es el área de la ciencia de la computación que se encarga de los componentes físicos, en los componentes que se centra la atención suelen ser las memorias, CPU y los periféricos, tanto de entrada como de salida, otra área elemental en el estudio de la computación es el lenguaje de la programación, el objetivo es crear nuevos lenguajes de programación, que sean más eficaces y veloces.

La ciencia de la computación ya tiene una larga historia, desde las antiguas civilizaciones, como los romanos y griegos utilizaban instrumentos mecánicos para contabilizar. En el siglo XIX se creó la primer computadora que recibió el nombre de maquina analítica, esa computadora fue creada para elaborar tablas matemáticas, años después en Inglaterra se utilizaron para realizar cálculos. En el siglo XX a fines de los años cuarenta en la universidad de Harvard se creó la computadora llamada Mark I (Molero, 2016).

Cuando la cantidad de diseños aumentaron, comenzaron a ser clasificadas por sus características en generaciones. Las máquinas que pertenecían a la primera generación (a lo largo de los años cincuenta) se caracterizaban porque su programación era mediante un lenguaje máquina y eran diseñadas con tubos de vacío; ocupaban habitaciones enteras por su gran tamaño y resultaban demasiado caras. En la segunda generación (década de los sesenta) las computadoras podían procesar más datos y eran un poco más pequeñas. Fue durante estos años que comenzaron a surgir las comunicaciones entre máquinas; surgieron las primeras computadoras personales. Tanto en la primera como en la segunda generación la

información que ingresaba a la maquina era mediante tarjetas perforadas. Fue durante la tercera generación cuando la producción comenzó a ser en serie; las computadoras podían ser manejadas por medio de los sistemas operativos; muchas de las tecnologías utilizadas en esos años se convirtieron en estándares que hasta el día de hoy todavía están utilizados. La cuarta generación es reconocida por la aparición de los microchips; esto significa un hito en las ciencias de la Computación; los circuitos no sólo comenzaron a ser mucho más pequeños y veloces, sino que a su vez resultaban mucho más económicos. Es por ello que la producción aumentó de manera notable y muchas más personas tuvieron acceso a las mismas. Esta generación es también conocida como la Revolución de la Computación (Beckner, 1975).

Al hablar de las ciencias de la computación y de la información se debe remontar a etapas muy antiguas, sin embargo se puede identificar que su etapa más fuerte de progreso es durante la década de los años 60; pero en los años 90 desarrolló una espectacular aceleración. Aun cuando surgieron como disciplinas independientes; ellas firmaron una alianza indisoluble para el progreso. Y es justo reconocer que, en realidad, hubiese sido muy difícil que la ciencia de la información alcanzara sus objetivos y metas, sin la ayuda de la ciencia de la computación, considerando el crecimiento acelerado de la cantidad de información disponible y necesaria (Lukin, 2000), así como el nivel de procesamiento que se proponía sin la existencia de las computadoras.

Esta alianza puede considerarse la segunda revolución de las ciencias de la información, precedida por una anterior, que introdujo los conceptos y métodos de las ciencias sociales durante la década de los años 50 y seguida por una más reciente, que posibilitó la adquisición de los enfoques de las ciencias económicas y gerenciales; no obstante, sin lugar a dudas, la más espectacular sigue siendo la segunda, que además sustenta a la tercera o última. Así, las ciencias de la información se han convertido, como otras tantas disciplinas, en una zona de confluencia de aplicaciones, métodos, enfoques y teorías procedentes de varias disciplinas, donde se mezcla arte, ciencia, tecnología, innovación y práctica diaria (Molero, 2016).

Si hay algo de cierto en esta revolución de las ciencias de la información es la caída de parte de los conceptos tradicionales, el surgimiento y la renovación casi exhaustiva de cada rincón de la teoría y la práctica de estas disciplinas; dicha revolución adquirió una significación especial con la masificación del uso de Internet durante la década de los años 90 (Shannon, 1993).

En muchos casos, el grado de interrelación de los productos de informática y las ciencias de la información, utilizados por profesionales y la población en general, que es difícil discernir si el producto es el resultado de una o de otra, porque con frecuencia es el resultado de la fusión de los avances de una y otra disciplina. Así, la alfabetización por ejemplo, en computación, aunque no es igual a la alfabetización en información en las condiciones actuales, debido a la necesidad

de ambas para explotar correctamente los recursos de información; el dominio de una de ellas por si sola carecería de valor. Ambas ciencias conforman hoy un par dialéctico y contradictorio, unido e indisoluble en la etapa actual de desarrollo, aunque, en ocasiones no puede negarse y cuyas consecuencias negativas se han señalado muchas veces, que la informática ha avanzado con su acelerado ritmo de desarrollo y que es parte de su propia dinámica, sin considerar el conocimiento acumulado por las ciencias de la información. La informática, por su propio ritmo de avance, arrastra tras de sí a muchas disciplinas y a la ciencia en general, salvo algunas áreas tan explosivas como ella en el avance del conocimiento como son los casos de la biotecnología, la genómica, la industria farmacéutica, etcétera (Feynman, 1996).

Los avances tecnológicos han logrado reducir de manera significativa el tamaño de las partes de la computadora, más en específico del procesador; que está llegando a su límite físico de reducción de tamaño. La ley de Moore predice que el número de transistores en un microprocesador será el doble cada 18 meses, del año 2020 al año 2030 los circuitos se encontrarán a una escala atómica (Gratton y Scott, 2017). Debido a esto, el siguiente paso será crear computadoras las cuales puedan aprovechar la potencia de los átomos y moléculas para realizar las tareas de memorias y procesamientos, estos dispositivos son las computadoras cuánticas, lo que da lugar al desarrollo de la Computación Cuántica.

1.1. Objetivos

A partir del desarrollo de la física cuántica surge el interés de poder utilizarla en las tecnologías de la información y computación, por lo que se plantearon los siguientes objetivos.

1.1.1. General

Evaluar el comportamiento temporal del entrelazamiento cuántico y de la fidelidad para sistemas de dos y tres qubits interactuando a través de un Hamiltoniano de Heisenberg.

1.1.2. Específicos

- Aplicar una compuerta que depende del tiempo a estados de dos y tres qubits para obtener una función, la cual sea utilizable para el cálculo de la concurrencia y fidelidad.
- Determinar la concurrencia y el 3-tangle como función del tiempo para analizar su comportamiento.
- Establecer y estudiar la fidelidad en función del tiempo, esto permitirá tener una herramienta más para el desarrollo de la computadora cuántica.

1.2. Planteamiento del problema

El desarrollo en la tecnología de almacenamiento y procesamiento de datos o información está llegando al límite con base en el material y en el tamaño que actualmente se maneja, los científicos en diversas áreas están buscando otros caminos para poder seguir avanzando en las ciencias de la información y de la computación. Surgen ideas como la bio-computadora y computadora cuántica, en un sentido natural por el tamaño del chip que se está utilizando. El tamaño del chip ya casi se reduce a la dimensión del átomo, es decir, ya está llegando al mundo cuántico, por lo que urge encontrar sistemas cuánticos manipulables para construir una computadora cuántica verdadera. Es por eso, que los investigadores se dedican a estudiar diferentes sistemas cuánticos, para conocer mejor sus propiedades relacionados a la información cuántica para poder ocuparse en la construcción de la computadora cuántica.

Las compuertas cuánticas son unos de los sistemas cuánticos conocidos, una computadora cuántica es física, y debe poder manipular partículas en espacios confinados. Con base en esto interesa estudiar las propiedades de entrelazamiento y de la fidelidad de la compuerta cuántica que poseen estos sistemas para ofrecer resultados interesantes a los experimentales para su soporte teórico lo que lleva al planteamiento de las siguientes preguntas:

¿Cuál es la evolución en el tiempo del entrelazamiento cuántico y de la fide-

lidad de un sistema de dos qubits interactuando a través de un Hamiltoniano de Heisenberg?

¿Cuál es la evolución en el tiempo del entrelazamiento cuántico de un sistema de tres qubits interactuando a través de un Hamiltoniano de Heisenberg?

¿Qué diferencias existen en el entrelazamiento cuántico y la fidelidad de los sistemas de dos y tres qubits que interactúan a través de un Hamiltoniano de Heisenberg?

En esta investigación se determinó para un Hamiltoniano de Heisenberg el entrelazamiento medido por la concurrencia y la fidelidad con dos qubits, además del 3-tangle y la fidelidad con tres qubits. Se consideran esos dos casos dado que son la base del comportamiento de la compuerta cuántica y no se han desarrollado esos casos de estudio.

1.3. Contribuciones

La principal contribución de esta investigación es frente al problema del desarrollo de la computación clásica, la intención es buscar una alternativa para dar solución a las limitantes físicas de la computación clásica. Se investigó una área alternativa: la ciencia de la información cuántica y computación cuántica, así que se estudiaron los comportamientos de compuertas cuánticas al implementar un hamiltoniano

para tener las bases teóricas, y así los físicos experimentales lo tomen en cuenta para el desarrollo de la computadora cuántica.

1.4. Hipótesis

Si se conocen las expresiones matemáticas de operador de evolución en el tiempo de Heisenberg entonces se podrán determinar el entrelazamiento y la fidelidad de dos y tres qubits como función del tiempo.

Marco teórico

En este apartado se presenta inicialmente que es la computación cuántica, después se aborda lo referente al hamiltoniano de Heisenberg, enseguida el concepto y la importancia del entrelazamiento cuántico y finalmente, la fidelidad cuántica.

2.1. Computación cuántica

Conforme va evolucionado la tecnología, la integración de sus componentes aumenta y caben más transistores en un menor espacio; así se fabrican microchips cada vez más pequeños, y mientras más pequeño más velocidad de proceso alcanzan. El problema radica en función de que se está llegando al límite físico, ya no se va a poder seguir reduciendo de tamaño en forma infinita; ya que dejan de funcionar de manera correcta. Al llegar a la escala de nanómetros, los electrones se escapan de los canales por los que deben de circular, lo que se conoce como efecto túnel.

Una partícula, cuando se encuentra con un obstáculo, no lo puede atravesar y por ende rebota. Pero al hablar de los electrones, los cuales son partículas cuánticas y se comportan como ondas, en ellos existe la posibilidad de que una parte pueda atravesar las paredes si es que estas son demasiado finas, por lo que la señal pasaría por canales donde no debería circular, haciendo que el chip no funcione de manera correcta.

En consecuencia, la computación digital tradicional, no tardará en llegar a su límite, la Ley de Moore se refiere en específico a los transistores, que prenden y apagan las señales eléctricas en los dispositivos para que puedan procesar la información y ejecutar tareas. Funcionan como la base del cerebro dentro de teléfonos, tabletas y todo tipo de gadgets. Mientras más transistores haya en un chip más rápido puede éste procesar la información (Gratton y Scott, 2017).

Para lograr que la Ley de Moore continúe, las fabricantes deben seguir encogiendo el tamaño de los transistores para para lograr colocar mayor cantidad de ellos dentro de un espacio más pequeño. El tamaño original de un transistor era de aproximadamente media pulgada. Los procesadores más nuevos contienen transistores que son más pequeños que un virus, un tamaño casi inimaginable (Gratton y Scott, 2017).

A modo de contexto, un virus como la gripe tiene unas dimensiones de 75 nm

(nanómetros). Los transistores que están integrados actualmente en la computadora o smartphone son más pequeños que ese virus. Por ese motivo los científicos coinciden que la Ley Moore llegará a su fin (Gratton y Scott, 2017).

- Las capas de transistores tridimensionales consisten en conseguir que la impresión de microprocesadores con láser (hasta ahora plana), sea capaz de superar esa barrera. Si estas obleas fuesen capaces de relacionarse entre sí se conseguiría una potencia de procesamiento nada desdeñable.
- La computación neuromórfica responde a la interconexión de millones de transistores entre sí, tal como sucede con las neuronas en el cerebro humano. Esta posibilidad ya fue probada por IBM en 2011, cuando desarrollo un procesador con 256 transistores con 1024 conexiones entre sí. Pero aunque esperanzadora, esta tecnología abriría las puertas a la inteligencia artificial, y eso es algo que al día de hoy sigue generando controversia.
- La computación cuántica también es una posibilidad, basa su arquitectura en los qubit, bits que pueden ser 0 ó 1 al mismo tiempo. Aún así es un modelo que se encuentra todavía en sus primeros estadios de desarrollo.

En general, se puede decir que la computación cuántica es una ciencia interdisciplinaria de la física cuántica y las ciencias de la computación que con las

propiedades de las partículas cuánticas tales como fotones, electrones, etc. busca hacer cómputo. El Procesamiento Cuántico de la Información (PCI) obedece las leyes fundamentales y métodos acordes para lograr el procesamiento de la información utilizando las leyes de la mecánica cuántica. De manera formal el estudio de la computación cuántica y el PCI comienza con las preguntas sobre computabilidad hechas por Richard Feynman a finales de los años 60's; en particular para simular sistemas cuánticos en tiempos razonables (tiempo polinomial).

La idea de computación cuántica surge en 1981 cuando Paul Benioff expuso su teoría para aprovechar las leyes cuánticas en el entorno de la computación. En vez de trabajar a nivel de voltajes eléctricos, se trabaja a nivel de cuanto. En 1985 David Deutsch publicó un artículo en el que demostró que era posible la construcción de una máquina universal de Turing usando la teoría de la mecánica cuántica. En ese mismo documento, Deutsch demostró que la solución de ciertos problemas utilizando una computadora cuántica (esto es, un sistema físico capaz de realizar cálculos de acuerdo a las leyes de la mecánica cuántica) era más rápida que cualquier solución propuesta para su ejecución en una computadora clásica. A partir de ese trabajo, el desarrollo teórico y experimental de la computación cuántica y el PCI ha crecido exponencialmente (Benioff, 1982).

El bit es la unidad básica de información en el modelo clásico de computación. Un bit puede tener dos valores distintos que se representan como 0 y 1 respectivamente. Desde un punto de vista un poco más formal, un bit es un elemento del

conjunto $V = \{0, 1\}$. Una cadena de n bits se puede considerar como un elemento del producto cartesiano: $V^n = V \times \dots \times V$.

Una cadena de bits puede representar cualquier información. Para ello basta establecer un mecanismo de codificación. Por otra parte, en el modelo clásico de computación, un algoritmo es un mecanismo para manipular cadenas de bits, y desde el punto de vista formal se puede considerar como un mecanismo para evaluar funciones booleanas. Así, dada una cadena de n bits, α , el algoritmo la modifica generando otra cadena de n bits, β la cuál es el resultado o la información requerida.

En el modelo cuántico de computación la unidad de información básica es el qubit o bit cuántico. El qubit puede estar en una superposición de estados base que se denotan $|0\rangle$ y $|1\rangle$.

El término qubit fue inventado y utilizado por primera vez en forma impresa por el Benjamin Schumacher (Schumacher, 1995). Aunque “qubit” respeta la regla inglesa (alemana, italiana,...), q debe ser seguido por u, ignora el requisito igualmente poderoso de que qu debe ser seguido por una vocal. Ha ganado aceptación porque se parece visualmente a una unidad de distancia inglesa obsoleta, el homónimo cubit.

Físicamente se representa por un sistema cuántico de dos estados. El siste-

ma cuántico de dos estados más conocidos o intuitivo es de un electrón. En un sistema de este tipo se puede representar el spin $-(1/2)$ por el estado $|0\rangle$ y el spin $+(1/2)$ por el estado $|1\rangle$. El qubit es un elemento del espacio de Hilbert de funciones de onda más simple no trivial de dos dimensiones, generado por los kets $|0\rangle$, $|1\rangle$, elementos de la base, y que convencionalmente pueden elegirse en una representación particular como:

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

Estos dos vectores son ortonormales, lo cual significa que bajo el producto escalar $\langle x|y\rangle$ definido en el espacio, los vectores base se comportan de la siguiente forma: En las dos últimas ecuaciones los vectores bra $\langle 0|$, $\langle 1|$, duales de los ket $|0\rangle$, $|1\rangle$, se obtienen como los traspuestos hermíticos de los ket y se representan de la siguiente manera:

$$\langle 0| = (1 \ 0) \quad \langle 1| = (0 \ 1) \quad (2.2)$$

Un qubit, en general, se presenta como una superposición o combinación lineal de los estados básicos $|0\rangle$ y $|1\rangle$ tal que:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \quad (2.3)$$

donde las amplitudes de probabilidad α y β son números complejos, esto es, contienen información de fase. Como en cualquier medida en mecánica cuántica, los

módulos cuadrados de estos coeficientes determinan respectivamente la probabilidad de obtener en una medida los resultados $|0\rangle$ y $|1\rangle$. Puesto que la probabilidad total tiene que ser la unidad, α y β se deben relacionar por la ecuación:

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \quad (2.4)$$

Esta ecuación simplemente asegura que en la medición se obtiene un estado o el otro. Debido a su naturaleza cuántica, cualquier medición del qubit altera inevitablemente su estado, se rompe la superposición y colapsa en aquel estado de base que ha resultado de la medida, y $\{\alpha, \beta\}$ se transforma irreversiblemente en $\{0, 1\}$.

Alternativamente, el qubit también puede describirse por medio de una matriz densidad. Para un qubit en el estado $|\psi\rangle$ el operador proyección correspondiente es:

$$\rho_\psi = |\psi\rangle\langle\psi| \quad (2.5)$$

El espacio de los estados del qubit se puede representar mediante espacio vectorial complejo bidimensional de módulo 1. Se pueden representar puntos en la superficie de una esfera; esta superficie se llama esfera de Bloch (figura 2.1). Cada estado del qubit corresponde a un punto de la superficie de una esfera unitaria. Esto esencialmente significa que un qubit tiene dos grados de libertad locales. Estos grados de libertad podrían ser la longitud y latitud, o como es más habitual, dos ángulos Θ y ϕ en coordenadas esféricas.

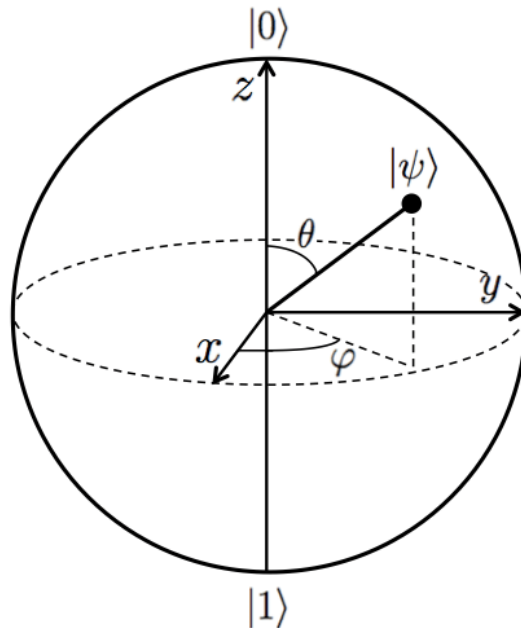


Figura 2.1: Esfera de Bloch

Naturaleza Probabilística de la Medida de Qubits: Siempre es posible medir el valor de un bit, pero por lo general no es posible medir el estado de un qubit. Se va a estudiar lo que ocurre al medir el qubit definido por la expresión:

$$\psi = \frac{1}{2}|0\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|1\rangle \quad (2.6)$$

Para ello se empleará el dispositivo esquematizado en la figura 2.2. El proceso de medida consiste en hacer pasar al electrón a través de la rendija del panel 1. Cuando pasa por la rendija el electrón atraviesa un campo magnético que desvía su trayectoria según el valor de su spin, hasta que finalmente el electrón atraviesa

una de las dos rendijas del panel.

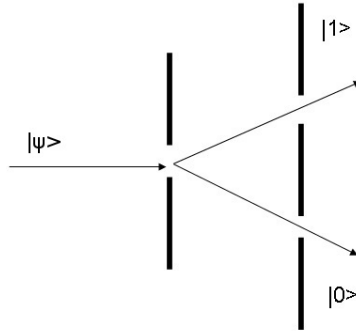


Figura 2.2: El qubit $|\psi\rangle$ no tiene spin definido.

Como el qubit no tiene spin definido, tiene cierta probabilidad de salir por la rendija superior o por la inferior. Las características que presentan los qubits proporcionan herramientas que se pueden utilizar en distintas áreas de la computación.

Una de las áreas en la que ha inferencia el estudio de los qubits es la comunicación cuántica, la cual estudia su comportamiento en compuertas cuánticas al aplicarles energía.

2.1.1. Comunicación cuántica

Las compuertas cuánticas son una parte importante para la computación y la comunicación cuántica. Por esta razón actualmente se han logrado avances expe-

rimentales significativos en cuanto a la implementación de éstas. En el siguiente apartado se muestra como ha sido posible experimentalmente la realización de una compuerta importante: la Hadamard.

Compuerta Hadamard: para pasar de la teoría a la aplicación se implementó la tecnología de circuito onda de luz plana, en inglés Planar Lightwave Circuit (PLC). Esta tecnología logra combinar características importantes de la fibra óptica y circuitos integrados, que asemeja canales de luz guiados en una plataforma de silicio, que son fabricados mediante la deposición secuencial de capas de vidrio en obleas de silicio y cuenta con núcleo de índice de refracción elevado (mejor emisión del fotón) utilizando el patrón de fotolitografía y técnica de grabado en seco (dry-etching). El silicio se utiliza por que proporciona un soporte sólido a las guías de onda. De este modo PLC es un componente de interfaz para las redes de fibra óptica, haciendo que esta tecnología sea un soporte complejo y versátil que al ser implementada en las compuertas cuánticas optimizará su aplicación para la comunicación.

El modelo propuesto para la compuerta Hadamard puede realizarse bajo dos modos de guía de onda, en el cual el qubit puede tener el estado lógico $|0\rangle$ el estado lógico $|1\rangle$. Recordando siempre que un espacio de estado de qubits es aquel en el cual están contenidas todas las superposiciones de los modos básicos $|0\rangle$ y $|1\rangle$. Es importante aclarar que la compuerta Hadamard cuenta con una entrada y una salida. Por lo tanto para la realización de esta compuerta se requiere utilizar

un splitter, que es un elemento utilizado en algunos sistemas de comunicación de fibra óptica, el cual puede combinar señales de diferentes fuentes o separarlas en dos o más canales (Douglas, 1972).

2.2. El Hamiltoniano de Heisenberg

El modelo teórico necesario para la obtención de la relación entre las energías de los estados moleculares y la constante de acoplamiento magnético, lo proporciona Heisenberg (1928), que estableció que la interacción entre centros paramagnéticos se puede asimilar a la interacción entre los espines de los electrones localizados en dichos centros, que condiciona el orden de estabilidad de los estados electrónicos más bajos de este tipo de moléculas.

Este Hamiltoniano, en el que Dirac (1947) introdujo la notación vectorial para los operadores de espín, se expresa según:

$$\hat{H} = - \sum_{i,j} J_{ij} \hat{S}_i \hat{S}_j \quad (2.7)$$

donde \hat{S}_i y \hat{S}_j son los operadores de momento de espín electrónico y J_{ij} es la constante de acoplamiento entre los electrones i y j . Inicialmente, con el Hamiltoniano de Heisenberg sólo se describían interacciones entre electrones con $\hat{S}_i = 1/2$. Posteriormente, Nesbet (1958) generalizó el mismo operador para tratar las

interacciones de espín total entre átomos o iones vecinos, dado que el estado de máxima multiplicidad en cada centro es el más estable, y J_{ij} se interpreta como el parámetro de interacción entre los espines totales de los centros. Por otra parte, se considera que sólo interaccionan los espines de los átomos o iones vecinos, el hamiltoniano de Heisenberg se simplifica a:

$$\hat{H} = - \sum_i J_i \hat{S}_i \hat{S}_{i+1} \quad (2.8)$$

Para dos qubits el Hamiltoniano se puede expresar de la siguiente manera

$$\hat{H} = A (\sigma_x^{(1)} \sigma_x^{(2)} + \sigma_y^{(1)} \sigma_y^{(2)}) + \Delta \sigma_z^{(1)} \sigma_z^{(2)} \quad (2.9)$$

donde: $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ denotan los operadores de espín y la suma es sobre todos los sitios de la cadena, la cual tiene una longitud L . A es conocida como la integral de intercambio. Δ es el parámetro de anisotropía, ambos son parámetros de interacción propios del modelo.

Para tres qubits se tiene el Hamiltoniano

$$\hat{H} = - \left\{ \hbar \sum_{k=1}^3 w_k S_z^k - J \sum_{k=1}^3 S_z^k S_z^{k+1} - J' \sum_{k=1}^3 S_z^k S_z^{k+2} + \frac{\Omega}{2} \sum_{k=1}^3 (e^{i\theta_k} S_-^k + e^{-i\theta_k} S_+^k) \right\} \quad (2.10)$$

donde:

w_1 es la frecuencia de Larmor, que es $\gamma\beta_0(x)$

γ se denomina relación giromagnética (a veces relación magnetogirica) cuyos valores pueden ser de 1 a 10

β es la intensidad del campo magnético, y sus valores van de 0.1T a 1.0T.

$$w_2 = \gamma w_1$$

$$w_3 = \gamma w_2$$

Ω = es la frecuencia de Rabi

$J = 0.1$ acoplamiento entre qubits primeros vecinos

$J' = J/8$ acoplamiento entre qubits segundos vecinos

$$\theta_1 = w_1 t + \phi_1$$

$$\theta_2 = w_2 t + \phi_2$$

$$\theta_3 = w_3 t + \phi_3$$

ϕ son fases arbitrarias

2.3. Entrelazamiento cuántico

Entrelazamiento: varios qubits se pueden llevar a estados entrelazados, en los que, como si estuvieran acoplados por un resorte invisible, se unen en un todo no separable. A través de una “acción espeluznante a distancia”, término que Albert Einstein inventó con ironía para expresar su incredulidad con respecto a este fenómeno cuántico, están en algún tipo de contacto directo entre sí, incluso cuando están espacialmente bien separados entre sí. Es como si cada bit cuántico supiera lo que están haciendo los demás y se viera afectado directamente por su comportamiento.

La concepción del entrelazamiento ha evolucionado desde la relativamente simple inicial de Schrödinger a una bastante sutil. Recientemente, la interferometría se ha convertido en una forma empírica de estudiar el entrelazamiento, que durante mucho tiempo ha servido como una herramienta fundamental de la física experimental. De hecho, es a través de la interferencia que el entrelazamiento se manifiesta más claramente (Barenco et al., 1995).

Debido a la superposición coherente de estados cuánticos correspondientes a valores distintos de una magnitud física es como surge la interferencia cuántica. Dichas superposiciones se producen cuando en principio no se puede distinguir, mediante una medición precisa en condiciones fijas, de secuencias alternativas de estados cuánticos que se originan con una preparación inicial común y llegan a un estado propio posterior específico. Es decir, se puede observar interferencia siempre que existan varias posibilidades indistinguibles para que el sistema físico en cuestión alcance un estado final detectable (Nielsen y Chuang, 2010). La distinción de tales alternativas juega un papel central en la cuantificación de la información codificada en señales cuánticas. La comunicación de información mediante sistemas cuánticos se caracteriza de forma muy natural dentro de la mecánica cuántica, ya que el uso mismo de los estados cuánticos implica considerar dos elementos básicos de señalización, a saber, la preparación del estado y la medición del estado.

Paul Dirac vio la interferencia cuántica como la interferencia de un sistema

físico consigo mismo, en oposición a otros sistemas como ocurre en la física clásica (Zeng y Zhou, 2019). La interferencia cuántica es similar, pero importante, diferente del efecto de interferencia más familiar en la física clásica en la que se observan patrones con regularidades discernibles, por ejemplo, en la superficie de un cuerpo de agua cuando se encuentran las estelas de los barcos que pasan. Una diferencia crucial es que en la física clásica lo que se agrega pueden ser cantidades no estadísticas, mientras que en la física cuántica lo que se agrega fundamentalmente son amplitudes de estado de valor complejo, cuyos cuadrados proporcionan solo probabilidades de eventos físicos.

Estados cuánticos y entrelazamiento en la formalización estándar del espacio de Hilbert de la mecánica cuántica, los estados puros se describen mediante vectores de estado, $|\psi\rangle$, formando un espacio de estado lineal atribuido al sistema en cuestión. Este es el contenido matemático del principio de superposición: en ausencia de restricciones adicionales, que se conocen como reglas de superselección, hace que todas las sumas de estados en este espacio sean físicamente válidas. En particular, a cada sistema cuántico se le atribuye un espacio vectorial complejo completo separable, el espacio H de Hilbert, que constituye su espacio de estado, análogo al de la mecánica clásica, a través del conjunto de operadores lineales hermitianos de clase traza ρ que actúan en él, los operadores estadísticos, que incluyen tanto estados puros como mezclas de los mismos, junto con un producto interno apropiado (Von Neumann, 1927).

La desigualdad de Bell implica que un estado cuántico bipartito puro puede tener correlaciones más allá de su contraparte clásica. Este tipo especial de correlación se llama entrelazamiento. El entrelazamiento se origina a partir del principio de superposición de los estados cuánticos y es el recurso clave para el procesamiento de información cuántica.

Para un estado bipartito puro $|\psi_{AB}\rangle$, es un estado de producto si se puede escribir como $|\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle$ para algunos $|\psi_A\rangle \in H_A$ y $|\psi_B\rangle \in H_B$; de lo contrario, está entrelazado.

Tradicionalmente, el entrelazamiento para un estado bipartito puro $|\psi_{AB}\rangle$ se mide por la entropía de vonNeumann de su subsistema. El entrelazamiento para un estado bipartito puro $|\psi_{AB}\rangle$ viene dado por la entropía de Von Neumann del estado del subsistema ρ_A o ρ_B : $S(|\psi_{AB}\rangle) = -\text{Tr}\rho_A \log\rho_A = -\text{Tr}\rho_B \log\rho_B$.

En términos de los coeficientes de Schmidt ($\{\lambda_i\}$) del estado $|\psi_{AB}\rangle$, se tiene $E(|\psi_{AB}\rangle) = H(\{\lambda_i\})$. Por lo tanto, para cualquier estado puro bipartito $AB = |\psi_{AB}\rangle\langle\psi_{AB}|$, su información mutua $I(A : B) = 2H(\{\lambda_i\})$ es el doble de su entrelazamiento. Dado que la información mutua mide la correlación total, esto en cierto sentido significa que para ρ_{AB} , la mitad de la correlación es cuántica y la otra mitad es clásica (Zeng y Zhou, 2019).

2.3.1. Entrelazamiento en algoritmos cuánticos

El cálculo cuántico rápido es una de las propiedades más deseadas de la teoría de la información cuántica. Hay pocos algoritmos cuánticos que superen a sus contrapartes clásicas. Estos son los famosos algoritmo de Deutsch Jozsa, Grover y Shor, y sus variaciones. Dado que el entrelazamiento es una piedra angular de la teoría de la información cuántica, es natural esperar que sea el ingrediente principal de los algoritmos cuánticos que son mejores que los clásicos. Esto fue discutido por primera vez por Jozsa (1997).

Si la computadora cuántica está en estado puro, entonces la computación cuántica necesita cierto nivel de entrelazamiento si no se simula de manera clásica. Jozsa y Linden (2002) demostraron que si el estado de una computadora cuántica en todo momento es producto de estados que involucran solo una cantidad constante (independiente del número de qubits de entrada n), entonces se puede simular de manera eficiente. Luego, Vidal (2000) demostró que si en todo momento, bajo cualquier corte bipartito, el estado de la computadora cuántica tiene un polinomio de rango de Schmidt en n , entonces el cálculo puede simularse eficientemente de manera clásica. En otras palabras, para dar una aceleración exponencial, el algoritmo cuántico necesita alcanzar el rango de Schmidt de orden exponencial en n , durante el cálculo.

Este resultado general fue estudiado por Orús y Latorre (2004) para diferentes

algoritmos en términos de entropía del entrelazamiento (entropía Von Neumann del subsistema).

Se demostró entre otros que el cálculo del algoritmo de Shor genera estados altamente entrelazados (con una cantidad lineal de entropía de enredo que corresponde al rango exponencial de Schmidt). Aunque no se sabe si el algoritmo de Shor proporciona una aceleración exponencial sobre la factorización clásica, este análisis sugiere que el algoritmo de Shor no puede simularse de manera clásica.

2.3.2. Entrelazamientos GHZ

Los estados familiares de Greenberger-Horne-Zeilinger (GHZ) se pueden reescribir entrelazando los estados de Bell de dos qubits con un estado de un tercer qubit, que se denomina entrelazamiento entrelazado. Se demostró que de esta manera se obtienen los 8 estados GHZ independientes que forman el simplex del entrelazamiento, el simplex mágico. El procedimiento de construcción permite una generalización a mayores dimensiones tanto en los grados de libertad (considerando qudits) como en el número de partículas (considerando estados n-partitos). Tales bases de estados de tipo GHZ exhiben una cierta geometría que es relevante para aplicaciones experimentales y teóricas de la información cuántica.

La paradoja de GHZ para demostrar aún más las diferencias esenciales entre la correlación clásica y la correlación cuántica, Greenberg, Horne y Zeilinger

encuentran que existen correlaciones notables en el siguiente estado:

$$|GHZ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |111\rangle). \quad (2.11)$$

Por tanto, el estado anterior se denomina estado GHZ.

2.3.3. Concurrencia

En la dimensión d , la expresión explícita de entrelazamiento de formación sólo se encuentra para varios tipos especiales de estado mixto, por ejemplo, los estados isotrópicos (Terhal y Vollbrecht, 2000) y los estados de Werner (Vollbrecht y Werner, 2001). Sin embargo, las fórmulas explícitas se han encontrado para el sistema cuántico de 2 niveles (Wootters, 1998). Aquí se presentan brevemente los resultados de Wootters et al. El entrelazamiento de la formación de un estado arbitrario ρ está relacionado con una cantidad llamada concurrencia $C(\rho)$ por una función

$$E_f(\rho) = \epsilon(C(\rho)) = h\left(\frac{1 + \sqrt{1 - C^2(\rho)}}{2}\right), \quad (2.12)$$

donde $h(x) = -x \log x - (1 - x) \log(1 - x)$ es la función de entropía binaria. El entrelazamiento de la formación aumenta monótonamente con respecto a la concurrencia creciente. La concurrencia se define por la fórmula

$$C(\rho) = \max\{0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4\} \quad (2.13)$$

donde las λ_i son la raíz cuadrada de los valores propios de $\rho\tilde{\rho}$ en orden descendente. Y $\tilde{\rho} = (\sigma_y \otimes \sigma_y)\rho^*(\sigma_y \otimes \sigma_y)$, donde σ_y es la matriz de Pauli. Para el estado puro $|\Psi\rangle = \alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle + \alpha_{10}|10\rangle + \alpha_{11}|11\rangle$, la concurrencia toma la forma

$$C(\Phi) = |\langle \Phi | \sigma_y \otimes \sigma_y | \Phi^* \rangle| = 2 |\alpha_{00}\alpha_{11} - \alpha_{01}\alpha_{10}|. \quad (2.14)$$

2.3.4. Tres tangle

Una característica sobresaliente del entrelazamiento multipartito es que existen clases localmente desiguales de estados genuinamente entrelazados (Dür et al., 2000). Por ejemplo, para cualquier número de qubit N , el estado GHZ correspondiente

$$|GHZ_N\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\dots 0\rangle + |11\dots 1\rangle) \quad (2.15)$$

no se puede transformar mediante operaciones locales invertibles en el estado W

$$|W_N\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}}(|0\dots 001\rangle + |0\dots 010\rangle + \dots + |1\dots 000\rangle) \quad (2.16)$$

donde se entiende que todos los estados base contienen N entradas. De manera similar, el estado del clúster de N -qubit es localmente diferente a cualquier estado GHZ de N -qubit (o estado W) (Hein et al., 2006). Al aplicar las medidas de entrelazamiento de las secciones anteriores, no sería difícil distinguir clases tan desiguales. Sin embargo, hay una forma elegante de solucionar este problema.

Hein et al. (2006) notaron que una función polinomial de los coeficientes en un estado cuántico puede ayudar a distinguir la GHZ del estado W para tres qubits. Lo denominaron entrelazamiento residual del estado de tres qubit $\psi \in \mathbb{C} \otimes \mathbb{C} \otimes \mathbb{C}$.

El tres tangle se puede calcular por medio de la expresión entrelazamiento residual

$$\tau_{res}(\psi) = 4 | d_1 - 2d_2 + 4d_3 |, \quad (2.17)$$

$$d_1 = \psi_{000}^2 \psi_{111}^2 + \psi_{001}^2 \psi_{110}^2 + \psi_{010}^2 \psi_{101}^2 + \psi_{011}^2 \psi_{100}^2$$

$$d_2 = \psi_{000} \psi_{001} \psi_{110} \psi_{111} + \psi_{000} \psi_{010} \psi_{101} \psi_{111} + \\ + \psi_{000} \psi_{011} \psi_{100} \psi_{111} + \psi_{001} \psi_{010} \psi_{101} \psi_{110} + \\ + \psi_{001} \psi_{011} \psi_{100} \psi_{110} + \psi_{010} \psi_{011} \psi_{100} \psi_{101}$$

$$d_3 = \psi_{000} \psi_{110} \psi_{101} \psi_{011} + \psi_{100} \psi_{010} \psi_{001} \psi_{111}$$

el tres tangle queda denotado en la ec. 2.18

$$\tau_3 = \sqrt{\tau_{res}} \quad (2.18)$$

2.4. Fidelidad cuántica

La fidelidad está limitada por las imperfecciones de las puertas elementales y por las pérdidas de la cavidad. Un mejor control de los campos extraviados en la configuración, que parecen ser una causa importante de imperfecciones, podría mejorar notablemente esta fidelidad. Las pérdidas de cavidad podrían reducirse con una nueva tecnología de espejo. Pruebas alentadoras indican que los tiempos de amortiguación de la cavidad más largos son realistas al alcance. Además, el proceso de colisión asistido por cavidad hace posible, en principio, realizar puertas cuánticas de alta fidelidad con un factor de calidad moderado (Chen et al., 2018).

En la teoría de la probabilidad, la fidelidad es una herramienta que busca la comparación entre distribuciones de probabilidad. Un ejemplo de ello está dada en la distribución dadas dos distribuciones $\{p_x\}$ y $\{q_x\}$ sobre un conjunto con índice x , la fidelidad de p y q se define como (Nielsen y Chuang, 2010)

$$F(p, q) = \sum_x \sqrt{p_x q_x}. \quad (2.19)$$

En la física cuántica, la fidelidad nace por la necesidad de cuantificar la cercanía entre dos estados cuánticos al observar cuanta información se conserva en un proceso cuántico (Nielsen y Chuang, 2010).

Uhlmann (1976) definió originalmente esta medida para dos estados con matrices densidad $\hat{\rho}_1$ y $\hat{\rho}_2$,

$$F \equiv \left(\text{Tr} \left[\sqrt{\hat{\rho}_1^{1/2} \hat{\rho}_2 \hat{\rho}_1^{1/2}} \right] \right)^2. \quad (2.20)$$

expresión que cumple con las siguientes propiedades:

1. La fidelidad se preserva cuando actúan evoluciones unitarias sobre los estados $F(\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2) = F(\hat{U}\hat{\rho}_1\hat{U}^\dagger, \hat{U}\hat{\rho}_2\hat{U}^\dagger)$ para cualquier operador unitario \hat{U} .
2. Es simétrica $F(\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2) = F(\hat{\rho}_2, \hat{\rho}_1)$.
3. $F(\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2)$ está en el rango $[0,1]$.
4. $F(\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2) = 1$ si $\hat{\rho}_1 = \hat{\rho}_2$.
5. $F(\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2) = 0$, si $\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2$ son ortogonales.

Para calcular la fidelidad entre un estado puro $|\psi\rangle$ y un estado arbitrario, ρ se tiene

$$F(|\psi\rangle, \rho) = \text{tr} \sqrt{\langle \psi | \rho | \psi \rangle} \quad (2.21)$$

$$= \sqrt{\langle \psi | \rho | \psi \rangle} \quad (2.22)$$

para dos estados puros

$$F(\rho, \sigma) \equiv \max |\langle \psi | \varphi \rangle| \quad (2.23)$$

Fidelidad de entrelazamiento: $F(\rho, E)$. Medida de conservación del entrelazamiento durante un proceso de mecánica cuántica, comenzando con el estado ρ de un sistema Q , que se supone que está entrelazado con otro sistema cuántico R , y aplicando la operación cuántica E al sistema Q .

Metodología

Se tiene un objetivo principal, y para cumplirlo, se utilizaron diferentes tipos de investigación: documental, descriptiva, analítica y aplicada.

- Documental

En una primera etapa se empleó la investigación documental y explicativa, en un inicio el trabajo se enfocó en una exhaustiva recopilación bibliográfica, misma que comprendió tanto la recolección como la asimilación de conceptos teóricos con los que es posible distinguir y analizar los elementos esenciales, principalmente artículos publicados en revistas de alto impacto, lo cuál permitió tener la información actual sobre el tema así como los avances que se han generando.

- Descriptiva

En la segunda etapa se seleccionaron los elementos de estudio adecuados,

en función de las características encontradas en la investigación documental.

- Analítica

Se hicieron los cálculos pertinentes se utilizarán propiedades de matrices y de números complejos para los cálculos de la concurrencia y de la fidelidad.

- Aplicada

Y por último, fue aplicada basada en ensayos programados con métodos numéricos desarrollándolos en el software Maple, para poder hacer el análisis de los resultados obtenidos.

Cálculos y Resultados

4.1. Entrelazamiento y fidelidad para un sistema de dos qubits

Inicialmente se trabajó con sistemas cuánticos de dos qubits para calcular el entrelazamiento y la fidelidad utilizando el Hamiltoniano de Heisenberg.

4.1.1. Hamiltoniano de Heisenberg y compuerta SWAP

Utilizando el Hamiltoniano de Heisenberg para ver el comportamiento de una compuerta SWAP y utilizando la notación decimal.

$$|00\rangle = |0\rangle$$

$$|01\rangle = |1\rangle$$

$$|10\rangle = |2\rangle$$

$$|11\rangle = |3\rangle$$

El comportamiento de una compuerta SWAP para dos qubits consiste en cambiar la posición de cada uno de ellos de la siguiente manera:

$$SWAP|00\rangle = |00\rangle$$

$$SWAP|01\rangle = |10\rangle$$

$$SWAP|10\rangle = |01\rangle$$

$$SWAP|11\rangle = |11\rangle$$

sus estados iniciales y su evolución con el tiempo se expresa de la siguiente manera:

$$d_0(t=0) = 0 \quad d_0(t=T) = 0$$

$$d_1(t=0) = 1 \quad d_1(t=T) = 0$$

$$d_2(t=0) = 0 \quad d_2(t=T) = 1$$

$$d_3(t=0) = 0 \quad d_3(t=T) = 0$$

Utilizando el Hamiltoniano de Heisenberg para dos qubits ecuación 4.1

$$\hat{H} = A (\sigma_x^{(1)} \sigma_x^{(2)} + \sigma_y^{(1)} \sigma_y^{(2)}) + \Delta \sigma_z^{(1)} \sigma_z^{(2)} \quad (4.1)$$

Y sustituyendo en la ecuación de Schrödinger en función del tiempo (partícula simple no relativista)

$$\begin{aligned} i \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle &= H |\psi(t)\rangle \\ \langle 0 | i \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle &= \langle 0 | H |\psi(t)\rangle \\ \langle 1 | i \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle &= \langle 1 | H |\psi(t)\rangle \\ \langle 2 | i \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle &= \langle 2 | H |\psi(t)\rangle \\ \langle 3 | i \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle &= \langle 3 | H |\psi(t)\rangle \end{aligned}$$

se obtiene

$$\begin{aligned} \langle 0 | H |\psi(t)\rangle &= \\ & \langle 0 | [A (\sigma_x^{(1)} \sigma_x^{(2)} + \sigma_y^{(1)} \sigma_y^{(2)}) + \Delta \sigma_z^{(1)} \sigma_z^{(2)}] \\ & |(d_0(t)|0\rangle + d_1(t)|1\rangle + d_2(t)|2\rangle + d_3(t)|3\rangle) \end{aligned}$$

4.1 Entrelazamiento y fidelidad para un sistema de dos qubits

donde σ_x, σ_y y σ_z son las matrices de Pauli las cuales al ser afectados por los estados $|0\rangle$ y $|1\rangle$ da como resultado

$$\begin{aligned}\sigma_x|0\rangle &= |1\rangle \\ \sigma_x|1\rangle &= |0\rangle \\ \sigma_y|0\rangle &= i|1\rangle \\ \sigma_y|1\rangle &= -i|0\rangle \\ \sigma_z|0\rangle &= |0\rangle \\ \sigma_z|1\rangle &= -|1\rangle\end{aligned}$$

al sustituir y realizar la operaciones genera la expresión 4.2

$$\begin{aligned}\langle 0|H|\psi(t)\rangle &= d_0A|11\rangle - d_0A|11\rangle + d_0\Delta|00\rangle + \\ & d_1A|10\rangle + d_1A|10\rangle - d_1\Delta|01\rangle + \\ & d_2A|01\rangle + d_2A|01\rangle - d_2\Delta|10\rangle + \\ & d_3A|00\rangle - d_3A|00\rangle + d_3\Delta|11\rangle\end{aligned}\tag{4.2}$$

por lo tanto, ahora la sustitución en la ecuación de Schödinger crea

$$\begin{aligned}
 \frac{id}{dt}d_0(t) &= \langle 0|H|\psi(t)\rangle \\
 &= d_0\Delta + d_3A - d_3A = d_0\Delta \\
 \frac{id}{dt}d_1(t) &= \langle 1|H|\psi(t)\rangle \\
 &= -d_1\Delta + d_2A + d_2A = 2d_2A - d_1\Delta \\
 \frac{id}{dt}d_2(t) &= \langle 2|H|\psi(t)\rangle \\
 &= d_1A + d_1A - d_2\Delta = 2d_1A - d_2\Delta \\
 \frac{id}{dt}d_3(t) &= \langle 3|H|\psi(t)\rangle \\
 &= d_0A - d_0A + d_3\Delta = d_3\Delta
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}d_0(t) &= -id_0\Delta \\
 \frac{d}{dt}d_1(t) &= -2id_2A + id_1\Delta \\
 \frac{d}{dt}d_2(t) &= -2id_1A + id_2\Delta \\
 \frac{d}{dt}d_3(t) &= -id_3\Delta
 \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = -i[(d_0 + d_3)\Delta + (d_1 + d_2)(2A - \Delta)] \quad (4.3)$$

En la figura 4.1 se muestra la probabilidad total del estado general de la compuerta SWAP

4.1 Entrelazamiento y fidelidad para un sistema de dos qubits

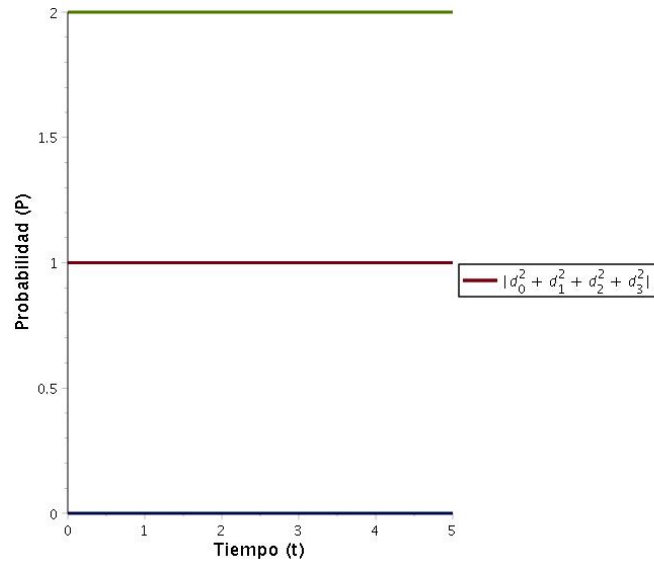


Figura 4.1: Estado general compuerta SWAP

En la figura 4.2 se muestra el comportamiento del estado d_0 en el cual su estado inicial es 0 y al evolucionar en el tiempo se mantiene en ese estado.

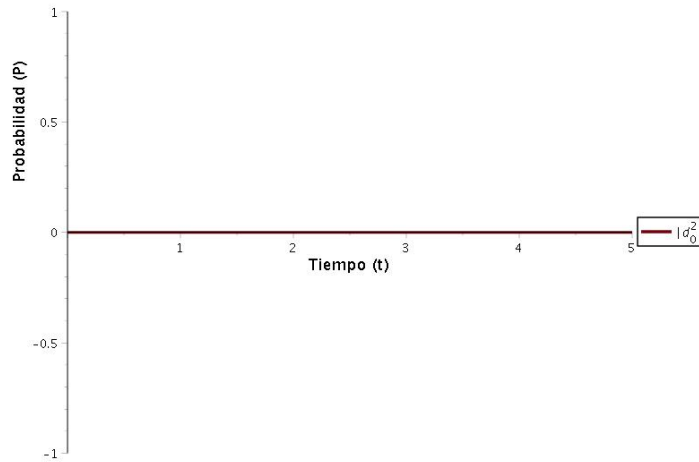


Figura 4.2: Estado 0 compuerta SWAP

En la figura 4.3 se muestra el comportamiento de los estados d_1 y d_2 donde el

4.1 Entrelazamiento y fidelidad para un sistema de dos qubits

primero pasa de su estado inicial 1 al estado 0 en su evolución en el tiempo, y el segundo pasa de su estado inicial 0 al estado 1 en su evolución en el tiempo.

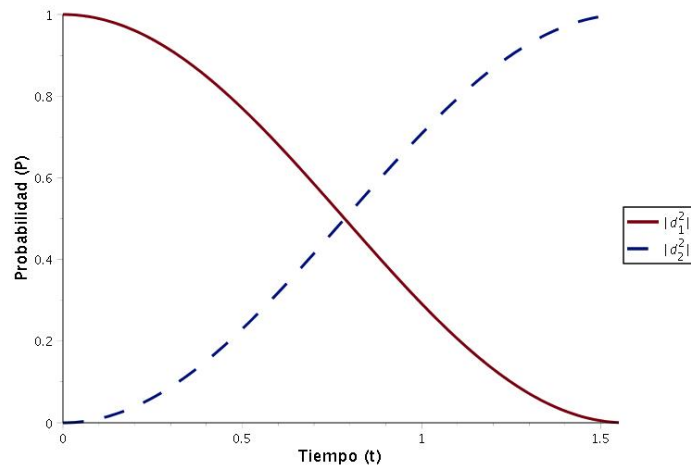


Figura 4.3: Estado 1 y 2 compuerta SWAP

En la figura 4.4 se muestra la el comportamiento del estado d_3 en el cuál su estado inicial es 0 y al evolucionar en el tiempo se mantiene en ese estado.

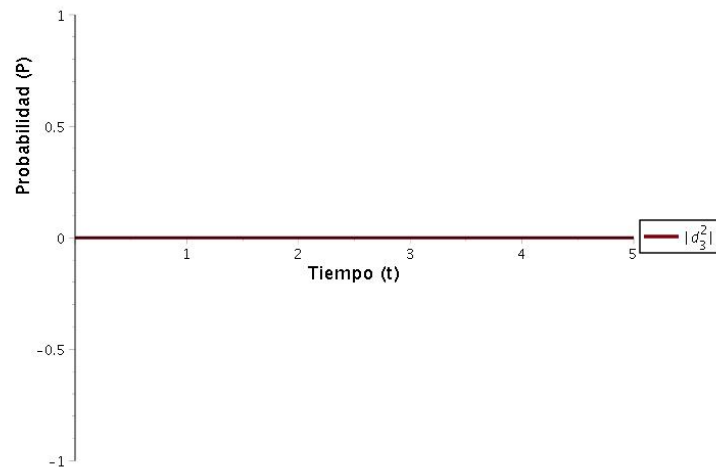


Figura 4.4: Estado 3 compuerta SWAP

4.1.2. Concurrencia para un sistemas de dos qubits

Se utilizó el hamiltoniano de Heisenber ecuación 4.4 y la imagen de Heisenberg ecuación 4.5 para calcular la concurrencia como medida de entrelazamiento de un sistema de dos qubits.

$$\hat{H} = A (\sigma_x^{(1)} \sigma_x^{(2)} + \sigma_y^{(1)} \sigma_y^{(2)}) + \Delta \sigma_z^{(1)} \sigma_z^{(2)} \quad (4.4)$$

$$| \psi(t) \rangle = e^{-iHt} | \psi(t = 0) \rangle \quad (4.5)$$

Al sustituir el hamiltoniano en la imagen de Heisenberg se obtiene la siguiente ecuación 4.6

$$| \psi(t) \rangle = e^{-iA\sigma_x^{(1)}\sigma_x^{(2)}t} e^{-iA\sigma_y^{(1)}\sigma_y^{(2)}t} e^{-i\Delta\sigma_z^{(1)}\sigma_z^{(2)}t} | \psi(t = 0) \rangle \quad (4.6)$$

La matriz de estado para la imagen de Heisenberg es:

$$H = \begin{pmatrix} \langle 0 | \hat{H} | 0 \rangle & \langle 0 | \hat{H} | 1 \rangle & \langle 0 | \hat{H} | 2 \rangle & \langle 0 | \hat{H} | 3 \rangle \\ \langle 1 | \hat{H} | 0 \rangle & \langle 1 | \hat{H} | 1 \rangle & \langle 1 | \hat{H} | 2 \rangle & \langle 1 | \hat{H} | 3 \rangle \\ \langle 2 | \hat{H} | 0 \rangle & \langle 2 | \hat{H} | 1 \rangle & \langle 2 | \hat{H} | 2 \rangle & \langle 2 | \hat{H} | 3 \rangle \\ \langle 3 | \hat{H} | 0 \rangle & \langle 3 | \hat{H} | 1 \rangle & \langle 3 | \hat{H} | 2 \rangle & \langle 3 | \hat{H} | 3 \rangle \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

considerando un primer caso con $\Delta = 0$ y sustituyendo la ecuación 4.4 en la matriz 4.1.2

$$H_1 = \begin{pmatrix} \langle 0 | A \left(\sigma_x^{(1)} \sigma_x^{(2)} + \sigma_y^{(1)} \sigma_y^{(2)} \right) | 0 \rangle & \dots & \langle 0 | A \left(\sigma_x^{(1)} \sigma_x^{(2)} + \sigma_y^{(1)} \sigma_y^{(2)} \right) | 3 \rangle \\ & \vdots & \vdots \\ & \cdot & \cdot \\ \langle 3 | A \left(\sigma_x^{(1)} \sigma_x^{(2)} + \sigma_y^{(1)} \sigma_y^{(2)} \right) | 0 \rangle & \dots & \langle 3 | A \left(\sigma_x^{(1)} \sigma_x^{(2)} + \sigma_y^{(1)} \sigma_y^{(2)} \right) | 3 \rangle \end{pmatrix}$$

desarrollando los elementos de la matriz y expresando los estados en su forma binaria se tiene

$$\langle 0 | A \left(\sigma_x^{(1)} \sigma_x^{(2)} + \sigma_y^{(1)} \sigma_y^{(2)} \right) | 0 \rangle = \langle 00 | A \left(\sigma_x^{(1)} \sigma_x^{(2)} + \sigma_y^{(1)} \sigma_y^{(2)} \right) | 00 \rangle$$

$$= A(\langle 00 | 11 \rangle + \langle 00 | i(i) | 11 \rangle) = A(0) = 0$$

$$\langle 0 | A \left(\sigma_x^{(1)} \sigma_x^{(2)} + \sigma_y^{(1)} \sigma_y^{(2)} \right) | 1 \rangle = \langle 00 | A \left(\sigma_x^{(1)} \sigma_x^{(2)} + \sigma_y^{(1)} \sigma_y^{(2)} \right) | 01 \rangle$$

$$= A(\langle 00 | 10 \rangle + \langle 00 | i(-i) | 01 \rangle) = A(0) = 0$$

$$\langle 0 | A \left(\sigma_x^{(2)} \sigma_x^{(2)} + \sigma_y^{(1)} \sigma_y^{(2)} \right) | 2 \rangle = \langle 00 | A \left(\sigma_x^{(1)} \sigma_x^{(2)} + \sigma_y^{(1)} \sigma_y^{(2)} \right) | 10 \rangle$$

$$= A(\langle 00 | 01 \rangle + \langle 00 | i(-i) | 10 \rangle) = A(0) = 0$$

$$\langle 0 | A \left(\sigma_x^{(1)} \sigma_x^{(2)} + \sigma_y^{(1)} \sigma_y^{(2)} \right) | 3 \rangle = \langle 00 | A \left(\sigma_x^{(1)} \sigma_x^{(2)} + \sigma_y^{(1)} \sigma_y^{(2)} \right) | 11 \rangle$$

$$= A(\langle 00 | 00 \rangle + \langle 00 | i(-i) | 00 \rangle) = A(1 - 1) = 0$$

$$\langle 1 | A \left(\sigma_x^{(1)} \sigma_x^{(2)} + \sigma_y^{(1)} \sigma_y^{(2)} \right) | 0 \rangle = \langle 01 | A \left(\sigma_x^{(1)} \sigma_x^{(2)} + \sigma_y^{(1)} \sigma_y^{(2)} \right) | 00 \rangle$$

$$= A(\langle 01 | 11 \rangle + \langle 01 | i(i) | 11 \rangle) = A(0) = 0$$

$$\langle 1 | A \left(\sigma_x^{(1)} \sigma_x^{(2)} + \sigma_y^{(1)} \sigma_y^{(2)} \right) | 1 \rangle = \langle 01 | A \left(\sigma_x^{(1)} \sigma_x^{(2)} + \sigma_y^{(1)} \sigma_y^{(2)} \right) | 01 \rangle$$

$$= A(\langle 01 | 10 \rangle + \langle 01 | i(-i) | 10 \rangle) = A(0) = 0$$

$$\langle 1 | A \left(\sigma_x^{(1)} \sigma_x^{(2)} + \sigma_y^{(1)} \sigma_y^{(2)} \right) | 2 \rangle = \langle 01 | A \left(\sigma_x^{(1)} \sigma_x^{(2)} + \sigma_y^{(1)} \sigma_y^{(2)} \right) | 10 \rangle$$

$$= A(\langle 01 | 01 \rangle + \langle 01 | i(-i) | 01 \rangle) = A(1 + 1) = 2A$$

$$\langle 1 | A \left(\sigma_x^{(1)} \sigma_x^{(2)} + \sigma_y^{(1)} \sigma_y^{(2)} \right) | 3 \rangle = \langle 01 | A \left(\sigma_x^{(1)} \sigma_x^{(2)} + \sigma_y^{(1)} \sigma_y^{(2)} \right) | 11 \rangle$$

$$= A(\langle 01 | 00 \rangle + \langle 01 | (-i)(-i) | 00 \rangle) = A(0) = 0$$

$$\langle 2 | A \left(\sigma_x^{(1)} \sigma_x^{(2)} + \sigma_y^{(1)} \sigma_y^{(2)} \right) | 0 \rangle = \langle 10 | A \left(\sigma_x^{(1)} \sigma_x^{(2)} + \sigma_y^{(1)} \sigma_y^{(2)} \right) | 00 \rangle$$

$$= A(\langle 10 | 11 \rangle + \langle 10 | i(i) | 11 \rangle) = A(0) = 0$$

$$\langle 2 | A \left(\sigma_x^{(1)} \sigma_x^{(2)} + \sigma_y^{(1)} \sigma_y^{(2)} \right) | 1 \rangle = \langle 10 | A \left(\sigma_x^{(1)} \sigma_x^{(2)} + \sigma_y^{(1)} \sigma_y^{(2)} \right) | 01 \rangle$$

$$= A(\langle 10 | 10 \rangle + \langle 10 | i(-i) | 10 \rangle) = A(1 + 1) = 2A$$

$$\langle 2 | A \left(\sigma_x^{(1)} \sigma_x^{(2)} + \sigma_y^{(1)} \sigma_y^{(2)} \right) | 2 \rangle = \langle 10 | A \left(\sigma_x^{(1)} \sigma_x^{(2)} + \sigma_y^{(1)} \sigma_y^{(2)} \right) | 10 \rangle$$

$$= A(\langle 10 | 01 \rangle + \langle 10 | i(-i) | 01 \rangle) = A(0) = 0$$

$$\langle 2 | A \left(\sigma_x^{(1)} \sigma_x^{(2)} + \sigma_y^{(1)} \sigma_y^{(2)} \right) | 3 \rangle = \langle 10 | A \left(\sigma_x^{(1)} \sigma_x^{(2)} + \sigma_y^{(1)} \sigma_y^{(2)} \right) | 11 \rangle$$

$$= A(\langle 10 | 00 \rangle + \langle 10 | (-i)(-i) | 00 \rangle) = A(0) = 0$$

$$\langle 3 | A \left(\sigma_x^{(1)} \sigma_x^{(2)} + \sigma_y^{(1)} \sigma_y^{(2)} \right) | 0 \rangle = \langle 11 | A \left(\sigma_x^{(1)} \sigma_x^{(2)} + \sigma_y^{(1)} \sigma_y^{(2)} \right) | 00 \rangle$$

$$= A(\langle 11 | 11 \rangle + \langle 11 | i(i) | 11 \rangle) = A(1 - 1) = 0$$

$$\langle 3 | A \left(\sigma_x^{(1)} \sigma_x^{(2)} + \sigma_y^{(1)} \sigma_y^{(2)} \right) | 1 \rangle = \langle 11 | A \left(\sigma_x^{(1)} \sigma_x^{(2)} + \sigma_y^{(1)} \sigma_y^{(2)} \right) | 01 \rangle$$

$$= A(\langle 11 | 10 \rangle + \langle 11 | i(-i) | 10 \rangle) = A(0) = 0$$

$$\langle 3 | A \left(\sigma_x^{(1)} \sigma_x^{(2)} + \sigma_y^{(1)} \sigma_y^{(2)} \right) | 2 \rangle = \langle 11 | A \left(\sigma_x^{(1)} \sigma_x^{(2)} + \sigma_y^{(1)} \sigma_y^{(2)} \right) | 10 \rangle$$

$$= A(\langle 11 | 01 \rangle + \langle 11 | i(-i) | 01 \rangle) = A(0) = 0$$

$$\langle 3 | A \left(\sigma_x^{(1)} \sigma_x^{(2)} + \sigma_y^{(1)} \sigma_y^{(2)} \right) | 3 \rangle = \langle 11 | A \left(\sigma_x^{(1)} \sigma_x^{(2)} + \sigma_y^{(1)} \sigma_y^{(2)} \right) | 11 \rangle$$

$$= A(\langle 11 | 00 \rangle + \langle 11 | (-i)(-i) | 00 \rangle) = A(0) = 0$$

por lo que la matriz queda

$$H_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2A & 0 \\ 0 & 2A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

considerando la matriz H_1 como

$$H_1 = 2A \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

asignando a π el valor de la matriz se crea la expresión $H_1 = 2A\pi$.

Al operar las potencias de H_1 y simplificando se obtiene

$$H_1^2 = (2A\pi)(2A\pi) = 4A^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4A^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

asignando a η el valor de la matriz resultante se tiene que $H^2 = 4A^2\eta$.

Para H_1^3 se considera $H^3 = (H^2)(H)$ lo que da como resultado

$$H_1^3 = (4A^2\eta)(2A\pi) = 8A^3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 8A^3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

entonces se tiene que $H_1^3 = 8A^3\pi$.

Por lo tanto las potencias de H son:

$$\begin{aligned} H_1 &= 2A\pi \\ H_1^2 &= 4A^2\eta = (2A)^2\eta \\ H_1^3 &= 8A^3\pi = (2A)^3\pi \\ H_1^4 &= 16A^4\eta = (2A)^4\eta \\ H_1^5 &= 32A^5\pi = (2A)^5\pi \\ &\vdots \end{aligned} \tag{4.8}$$

Considerando las series de Taylor

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + (x) + \frac{(x)^2}{2!} + \frac{(x)^3}{3!} + \frac{(x)^4}{4!} + \dots \quad (4.9)$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x)^{2n}}{(2n)!} = \frac{(x)^0}{0!} - \frac{(x)^2}{2!} + \frac{(x)^4}{4!} + \dots$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x)^{2n+1}}{(2n+1)!} = (x) - \frac{(x)^3}{3!} + \frac{(x)^5}{5!} + \dots \quad (4.10)$$

aplicando estas series al exponencial de la imagen de Heisenberg

$$\begin{aligned} e^{-iHt} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-iHt)^n}{n!} = 1 + (-iHt) + \frac{(-iHt)^2}{2!} + \frac{(-iHt)^3}{3!} + \dots \\ &= 1 - iHt + \frac{(-it)^2 H^2}{2} + \frac{(-it)^3 H^3}{6} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(-iHt)^{2n+1}}{(2n+1)!} &= \frac{(-iHt)^1}{1!} - \frac{(-iHt)^3}{3!} + \frac{(-iHt)^5}{5!} + \dots \\ &= \frac{(-it)^1 H}{1!} - \frac{(-it)^3 H^3}{3!} + \frac{(-it)^5 H^5}{5!} + \dots \\ &= (-it)(2A\pi) - \frac{(-it)^3 (2A)^3 \pi}{3!} + \frac{(-it)^5 (2A)^5 \pi}{5!} + \dots \\ &= -i\pi \sin(2At) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(-iH_1 t)^{2n}}{(2n)!} &= \frac{(-iH_1 t)^0}{0!} - \frac{(-iH_1 t)^2}{2!} + \frac{(-iH_1 t)^4}{4!} + \dots \\
 &= (-it)H_1 - \frac{(-it)^3 H_1^3}{3!} + \frac{(-it)^5 H_1^5}{5!} + \dots \\
 &= \frac{(-2Ait)^0(\eta)}{0!} - \frac{(-it)^2(2A)^2\eta}{2!} + \frac{(-it)^4(2A)^4\eta}{4!} + \dots \\
 &= \eta \cos(2At)
 \end{aligned}$$

por lo tanto se obtiene que

$$|\psi(t)\rangle = (\cos(2At)\eta - i \sin(2At)\pi) |\psi(t=0)\rangle. \quad (4.11)$$

Para cuando $\Delta \neq 0$ se tiene

$$\begin{aligned}
 |\psi(t)\rangle &= e^{-i(A(\sigma_x^{(1)}\sigma_x^{(2)} + \sigma_y^{(1)}\sigma_y^{(2)}) + \Delta\sigma_z^{(1)}\sigma_z^{(2)})t} |\psi(t=0)\rangle \\
 &= e^{-i(A(\sigma_x^{(1)}\sigma_x^{(2)} + \sigma_y^{(1)}\sigma_y^{(2)}))t} e^{-i(\Delta\sigma_z^{(1)}\sigma_z^{(2)})t} |\psi(t=0)\rangle
 \end{aligned} \quad (4.12)$$

como ya se conoce el resultado del primer exponencial 4.11 se calcula el segundo

$$H_2 = \begin{pmatrix} \langle 0 | \Delta (\sigma_z^{(1)}\sigma_z^{(2)}) | 0 \rangle & \dots & \langle 0 | \Delta (\sigma_z^{(1)}\sigma_z^{(2)}) | 3 \rangle \\ \vdots & \cdot & \vdots \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \langle 3 | \Delta (\sigma_z^{(1)}\sigma_z^{(2)}) | 0 \rangle & \dots & \langle 3 | \Delta (\sigma_z^{(1)}\sigma_z^{(2)}) | 3 \rangle \end{pmatrix}$$

desarrollando los elementos de la matriz y expresando los estados en su forma binaria se tiene

$$\langle 0 | \Delta \left(\sigma_z^{(1)} \sigma_z^{(2)} \right) | 0 \rangle = \langle 00 | \Delta \left(\sigma_z^{(1)} \sigma_z^{(2)} \right) | 00 \rangle$$

$$= \Delta(\langle 00 | 00 \rangle) = \Delta(1) = \Delta$$

$$\langle 0 | \Delta \left(\sigma_z^{(1)} \sigma_z^{(2)} \right) | 1 \rangle = \langle 00 | \Delta \left(\sigma_z^{(1)} \sigma_z^{(2)} \right) | 01 \rangle$$

$$= \Delta(-\langle 00 | 01 \rangle) = \Delta(0) = 0$$

$$\langle 0 | \Delta \left(\sigma_z^{(1)} \sigma_z^{(2)} \right) | 2 \rangle = \langle 00 | \Delta \left(\sigma_z^{(1)} \sigma_z^{(2)} \right) | 10 \rangle$$

$$= \Delta(-\langle 00 | 10 \rangle) = \Delta(0) = 0$$

$$\langle 0 | \Delta \left(\sigma_z^{(1)} \sigma_z^{(2)} \right) | 3 \rangle = \langle 00 | \Delta \left(\sigma_z^{(1)} \sigma_z^{(2)} \right) | 11 \rangle$$

$$= \Delta(\langle 00 | 11 \rangle) = \Delta(0) = 0$$

$$\langle 1 | \Delta \left(\sigma_z^{(1)} \sigma_z^{(2)} \right) | 0 \rangle = \langle 01 | \Delta \left(\sigma_z^{(1)} \sigma_z^{(2)} \right) | 00 \rangle$$

$$= \Delta(\langle 01 | 00 \rangle) = \Delta(0) = 0$$

$$\langle 1 | \Delta \left(\sigma_z^{(1)} \sigma_z^{(2)} \right) | 1 \rangle = \langle 01 | \Delta \left(\sigma_z^{(1)} \sigma_z^{(2)} \right) | 01 \rangle$$

$$= \Delta(-\langle 01 | 01 \rangle) = \Delta(-1) = -\Delta$$

$$\langle 1 | \Delta \left(\sigma_z^{(1)} \sigma_z^{(2)} \right) | 2 \rangle = \langle 01 | \Delta \left(\sigma_z^{(1)} \sigma_z^{(2)} \right) | 10 \rangle$$

$$= \Delta(-\langle 01 | 10 \rangle) = \Delta(0) = 0$$

$$\langle 1 | \Delta \left(\sigma_z^{(1)} \sigma_z^{(2)} \right) | 3 \rangle = \langle 01 | \Delta \left(\sigma_z^{(1)} \sigma_z^{(2)} \right) | 11 \rangle$$

$$= \Delta(\langle 01 | 11 \rangle) = \Delta(0) = 0$$

$$\langle 2 | \Delta \left(\sigma_z^{(1)} \sigma_z^{(2)} \right) | 0 \rangle = \langle 10 | \Delta \left(\sigma_z^{(1)} \sigma_z^{(2)} \right) | 00 \rangle$$

$$= \Delta(\langle 10 | 00 \rangle) = \Delta(0) = 0$$

$$\langle 2 | \Delta \left(\sigma_z^{(1)} \sigma_z^{(2)} \right) | 1 \rangle = \langle 10 | \Delta \left(\sigma_z^{(1)} \sigma_z^{(2)} \right) | 01 \rangle$$

$$= \Delta(-\langle 10 | 01 \rangle) = \Delta(0) = 0$$

$$\langle 2 | \Delta \left(\sigma_z^{(1)} \sigma_z^{(2)} \right) | 2 \rangle = \langle 10 | \Delta \left(\sigma_z^{(1)} \sigma_z^{(2)} \right) | 10 \rangle$$

$$= \Delta(-\langle 10 | 10 \rangle) = -\Delta(1) = -\Delta$$

$$\langle 2 | \Delta \left(\sigma_z^{(1)} \sigma_z^{(2)} \right) | 3 \rangle = \langle 10 | \Delta \left(\sigma_z^{(1)} \sigma_z^{(2)} \right) | 11 \rangle$$

$$= \Delta(\langle 10 | 11 \rangle) = \Delta(0) = 0$$

$$\langle 3 | \Delta \left(\sigma_z^{(1)} \sigma_z^{(2)} \right) | 0 \rangle = \langle 11 | \Delta \left(\sigma_z^{(1)} \sigma_z^{(2)} \right) | 00 \rangle$$

$$= \Delta(\langle 11 | 00 \rangle) = \Delta(0) = 0$$

$$\langle 3 | \Delta \left(\sigma_z^{(1)} \sigma_z^{(2)} \right) | 1 \rangle = \langle 11 | \Delta \left(\sigma_z^{(1)} \sigma_z^{(2)} \right) | 01 \rangle$$

$$= \Delta(-\langle 11 | 01 \rangle) = \Delta(0) = 0$$

$$\langle 3 | \Delta \left(\sigma_z^{(1)} \sigma_z^{(2)} \right) | 2 \rangle = \langle 11 | \Delta \left(\sigma_z^{(1)} \sigma_z^{(2)} \right) | 10 \rangle$$

$$= \Delta(-\langle 11 | 10 \rangle) = \Delta(0) = 0$$

$$\langle 3 | \Delta \left(\sigma_z^{(1)} \sigma_z^{(2)} \right) | 3 \rangle = \langle 11 | \Delta \left(\sigma_z^{(1)} \sigma_z^{(2)} \right) | 11 \rangle$$

$$= \Delta(\langle 11 | 11 \rangle) = \Delta(1) = \Delta$$

por lo que la matriz queda

$$H_2 = \begin{pmatrix} \Delta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\Delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\Delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta \end{pmatrix}$$

considerando la matriz H_2 como

$$H_2 = \Delta \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

asignando a τ el valor de la matriz se crea la expresión $H_2 = \Delta\tau$

Al operar las potencias de H_2

$$H_2^2 = (\Delta\tau)(\Delta\tau) = \Delta^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \Delta^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

asignando a 1 el valor de la matriz resultante se tiene que $H_2^2 = \Delta^2 1$.

Para H_2^3 se considera $H_2^3 = (H_2^2)(H_2)$ lo que da como resultado

$$\begin{aligned}
 H_2^3 = (\Delta^2 1)(\Delta \tau) &= \Delta^3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \Delta^3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

entonces se tiene que $H_2^3 = \Delta^3 \tau$.

por lo tanto las potencias de H_2 son:

$$\begin{aligned}
 H_2 &= \Delta \tau \\
 H_2^2 &= \Delta^2 1 \\
 H_2^3 &= \Delta^3 \tau \\
 H_2^4 &= \Delta^4 1 \\
 H_2^5 &= \Delta^5 \tau \\
 &\vdots
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

Considerando las series de Taylor

$$\begin{aligned}
 e^{-iH_2t} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-iH_2t}{n!} = 1 + (-iH_2t) + \frac{(-iH_2t)^2}{2!} + \frac{(-iH_2t)^3}{3!} + \dots \\
 &= 1 - iH_2t + \frac{(-it)^2 H_2^2}{2} + \frac{(-it)^3 H_2^3}{6} + \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(-iH_2t)^{2n+1}}{(2n+1)!} &= \frac{(-iH_2t)^1}{1!} - \frac{(-iH_2t)^3}{3!} + \frac{(-iH_2t)^5}{5!} + \dots \\
 &= \frac{(-it)^1 H_2}{1!} - \frac{(-it)^3 H_2^3}{3!} + \frac{(-it)^5 H_2^5}{5!} + \dots \\
 &= (-it)(\Delta\tau) - \frac{(-it)^3 (\Delta)^3 \tau}{3!} + \frac{(-it)^5 (\Delta)^5 \tau}{5!} + \dots \\
 &= -i\tau \sin(\Delta t)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(-iH_2t)^{2n}}{(2n)!} &= \frac{(-iH_2t)^0}{0!} - \frac{(-iH_2t)^2}{2!} + \frac{(-iH_2t)^4}{4!} + \dots \\
 &= (-it)H_2 - \frac{(-it)^3 H_2^3}{3!} + \frac{(-it)^5 H_2^5}{5!} + \dots \\
 &= \frac{(-\Delta it)^0 (1)}{0!} - \frac{(-it)^2 (\Delta)^2 (1)}{2!} + \frac{(-it)^4 (\Delta)^4 (1)}{4!} + \dots \\
 &= 1 \cos(\Delta t)
 \end{aligned}$$

por lo tanto se obtiene que

$$|\psi(t)\rangle = (\cos(\Delta t)1 - i \sin(\Delta t)\tau) |\psi(t=0)\rangle. \quad (4.14)$$

Al relacionar las expresión 4.11 y la 4.14

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= e^{-iHt} |\psi(t=0)\rangle \\ &= e^{-i(H_1+H_2)t} |\psi(t=0)\rangle \\ &= e^{-iH_1t} e^{-iH_2t} |\psi(t=0)\rangle \\ &= (\cos(2At)\eta - i \sin(2At)\pi)(\cos(\Delta t)1 - i \sin(\Delta t)\tau) |\psi(t=0)\rangle \\ &= (\cos(2At) \cos(\Delta t)\eta 1 - i \sin(2At) \cos(\Delta t)\pi 1 \\ &\quad - \cos(2At)i \sin(\Delta t)\eta\tau + i \sin(2At)i \sin(\Delta t)\pi\tau) |\psi(t=0)\rangle \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\eta 1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \eta$$

$$\pi 1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \pi$$

$$\eta\tau = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -\eta$$

$$\pi\tau = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -\pi$$

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= [(\cos(2At)(\cos(\Delta t) + i \sin(\Delta t))\eta + (\sin(2At)(i \cos(\Delta t) \\ &\quad - \sin(\Delta t))\pi) |\psi(t=0)\rangle \end{aligned} \tag{4.16}$$

Utilizando los estados de Bell (4.17) (estados de máximo entrelazamiento) para calcular su concurrencia y fidelidad se tiene:

$$\begin{aligned} |\psi^+(t=0)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle + |2\rangle) \\ |\psi^-(t=0)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle - |2\rangle) \\ |\phi^+(t=0)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |3\rangle) \\ |\phi^-(t=0)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |3\rangle) \end{aligned} \tag{4.17}$$

4.1.2.1. Concurrencia y fidelidad estados de Bell

Inicialmente se calculó la concurrencia y la fidelidad cuántica de los estados de Bell.

Primer estado de Bell

$$|\psi^+(t)\rangle = e^{-iHt} |\psi^+(t=0)\rangle$$

$$\begin{aligned} |\psi^+(t)\rangle = & [\cos(2At)(\cos(\Delta t) + i \sin(\Delta t))\eta \\ & + \sin(2At)(i \cos(\Delta t) - \sin(\Delta t))\pi] \\ & [\frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |2\rangle)] \end{aligned} \tag{4.18}$$

$$\pi|1\rangle = |2\rangle$$

$$\pi|2\rangle = |1\rangle$$

$$\eta|1\rangle = |1\rangle$$

$$\eta|2\rangle = |2\rangle$$

$$\begin{aligned}
 |\psi^+(t)\rangle = & \frac{1}{\sqrt{2}} [(\cos(2At)(\cos(\Delta t) + i \sin(\Delta t)) \\
 & + \sin(2At)(i \cos(\Delta t) - \sin(\Delta t))) |1\rangle \\
 & + (\cos(2At)(\cos(\Delta t) + i \sin(\Delta t)) \\
 & + \sin(2At)(i \cos(\Delta t) \\
 & - \sin(\Delta t))) |2\rangle] \tag{4.19}
 \end{aligned}$$

Concurrencia del primer estado de Bell

$$C_1(t) = 2 |d_0(t)d_3(t) - d_1(t)d_2(t)| \tag{4.20}$$

$$d_0(t) = 0$$

$$\begin{aligned}
 d_1(t) = & \frac{1}{\sqrt{2}} [\cos(2At)(\cos(\Delta t) + i \sin(\Delta t)) \\
 & + \sin(2At)(i \cos(\Delta t) - \sin(\Delta t))]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d_2(t) = & \frac{1}{\sqrt{2}} [\cos(2At)(\cos(\Delta t) + i \sin(\Delta t)) \\
 & + \sin(2At)(i \cos(\Delta t) - \sin(\Delta t))]
 \end{aligned}$$

$$d_3(t) = 0$$

$$\begin{aligned}
C_1(t) &= 2 \left| (0)(0) - \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos(2At)(\cos(\Delta t) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + i \sin(\Delta t)) + \sin(2At)(i \cos(\Delta t) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \sin(\Delta t)) \right] \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos(2At)(\cos(\Delta t) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + i \sin(\Delta t)) + \sin(2At)(i \cos(\Delta t) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \sin(\Delta t)) \right] \right| \tag{4.21}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \left| - \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(2 \cos^2(2At) - 1)(2 \cos^2(\Delta t) - 1) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. (-4 \cos(2At) \sin(2At) \cos(\Delta t) \sin(\Delta t)) \right] \right. \\
&\quad \left. + \left[\frac{2i}{\sqrt{2}}((\cos(\Delta t) \sin(\Delta t))(2 \cos^2(2At) - 1) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \cos(2At) \sin(2At)(2 \cos^2(\Delta t) - 1)) \right] \right| \tag{4.22}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left| [(2 \cos^2 \Delta t - 1)(2 \cos^2 2At - 1) \right. \\
&\quad \left. (-4 \cos(2At) \sin(2At) \cos(\Delta t) \sin(\Delta t))] \right. \\
&\quad \left. + [2i((\cos(\Delta t) \sin(\Delta t))(2 \cos^2(2At) - 1) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \cos(2At) \sin(2At)(2 \cos^2(\Delta t) - 1))] \right| \tag{4.23}
\end{aligned}$$

En la figura 4.5 se muestra que utilizando el primer estado de Bell se tiene una concurrencia máxima con los valores de $\Delta = 0.8$ y $A = 0.1..0.5$.

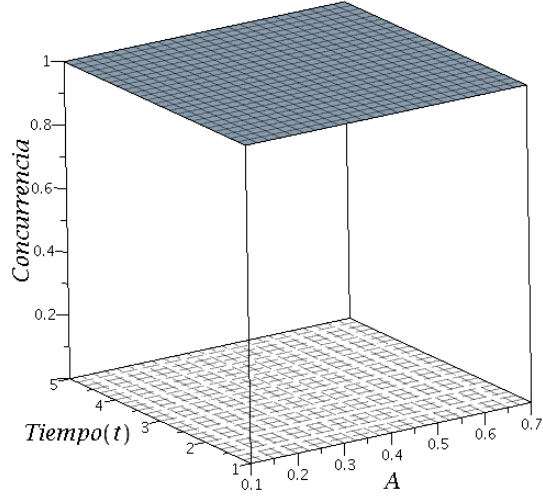


Figura 4.5: Concurrencia primer estado de Bell

Fidelidad del primer estado de Bell

$$F_1 = | \langle \psi(t) | (t = 0) \rangle | \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned}
 F_1 &= | \langle d_0(t)00 + d_1(t)01 + d_2(t)10 + d_3(t)11 | \frac{1}{\sqrt{2}}(01 + 10) \rangle | \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} [d_0(t) \langle 00 | 01 \rangle + d_0(t) \langle 00 | 10 \rangle + d_1(t) \langle 01 | 01 \rangle \\
 &\quad + d_1(t) \langle 01 | 10 \rangle + d_2(t) \langle 10 | 01 \rangle + d_2(t) \langle 10 | 10 \rangle \\
 &\quad + d_3(t) \langle 11 | 01 \rangle + d_3(t) \langle 11 | 10 \rangle] \\
 F_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} [d_1(t) + d_2(t)] \quad (4.25)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_1 = & \left| \langle \cos(2At)(\cos(\Delta t) + i \sin(\Delta t))\eta \right. \\
 & \left. + \sin(2At)(i \cos(\Delta t) - \sin(\Delta t))\pi \right. \\
 & \left. \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |2\rangle) \right] \right|^2
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

En la figura 4.6 se muestra que utilizando el primer estado de Bell se tiene una fidelidad máxima con los valores de $\Delta = 0.8$ y $A = 0.1..0.5$.

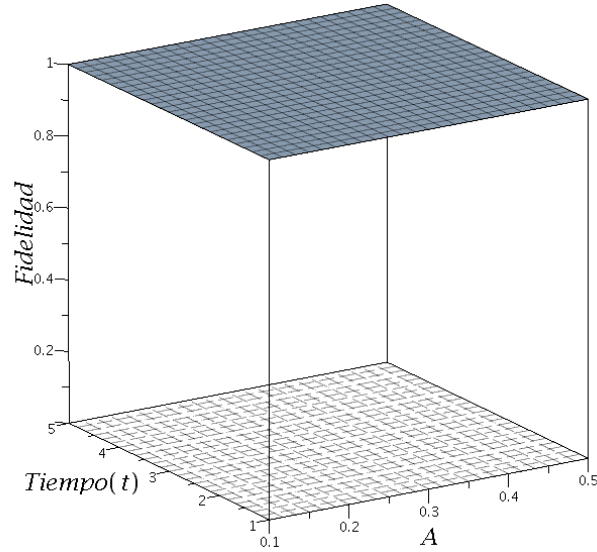


Figura 4.6: Fidelidad primer estado de Bell

Segundo estado de Bell

$$|\psi^-(t)\rangle = e^{-i\hat{H}t} |\psi^-(t=0)\rangle$$

$$\begin{aligned}
 |\psi^-(t)\rangle = & [\cos(2At)(\cos(\Delta t) + i \sin(\Delta t))\eta \\
 & + \sin(2At)(i \cos(\Delta t) - \sin(\Delta t))\pi] \\
 & [\frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle - |2\rangle)] \tag{4.27}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |\psi^-(t)\rangle = & \frac{1}{\sqrt{2}}[(\cos(2At)(\cos(\Delta t) + i \sin(\Delta t)) \\
 & - \sin(2At)(i \cos(\Delta t) - \sin(\Delta t))) |1\rangle \\
 & + (-\cos(2At)(\cos(\Delta t) + i \sin(\Delta t)) \\
 & + \sin(2At)(i \cos(\Delta t) \\
 & - \sin(\Delta t))) |2\rangle] \tag{4.28}
 \end{aligned}$$

$$\pi|1\rangle = |2\rangle$$

$$\pi|2\rangle = |1\rangle$$

$$\eta|1\rangle = |1\rangle$$

$$\eta(-|2\rangle) = -|2\rangle$$

Concurrencia del segundo estado de Bell

$$C_2(t) = 2 | d_0 d_3 - d_1 d_2 | \quad (4.29)$$

$$d_0 = 0$$

$$d_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} [\cos(2At)(\cos(\Delta t) + i \sin(\Delta t)) - \sin(2At)(i \cos(\Delta t) - \sin(\Delta t))]$$

$$d_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} [-\cos(2At)(\cos(\Delta t) + i \sin(\Delta t)) + \sin(2At)(i \cos(\Delta t) - \sin(\Delta t))]$$

$$d_3 = 0$$

$$\begin{aligned} C_2(t) &= 2 \left| (0)(0) - \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (\cos(2At)(\cos(\Delta t) + i \sin(\Delta t)) - \sin(2At)(i \cos(\Delta t) - \sin(\Delta t))) \right] \right. \\ &\quad \left. \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (-\cos(2At)(\cos(\Delta t) + i \sin(\Delta t)) + \sin(2At)(i \cos(\Delta t) - \sin(\Delta t))) \right] \right| \end{aligned} \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned}
 = & \left| \left[(2 \cos^2 \Delta t - 1)(1 - 2 \cos^2 2At) \right. \right. \\
 & - 4 \cos(2At) \sin(2At) \cos(\Delta t) \sin(\Delta t) \left. \left. \right] \right. \\
 & + \left[2i(\cos(2At) \sin(2At)(2 \cos^2(\Delta t) - 1) \right. \\
 & \left. \left. - \cos(\Delta t) \sin(\Delta t)(2 \cos^2(2At) - 1)) \right] \right| \quad (4.31)
 \end{aligned}$$

En la figura 4.7 se muestra que utilizando el segundo estado de Bell se tiene una concurrencia máxima con los valores de $\Delta = 0.8$ y $A = 0.1..0.5$.

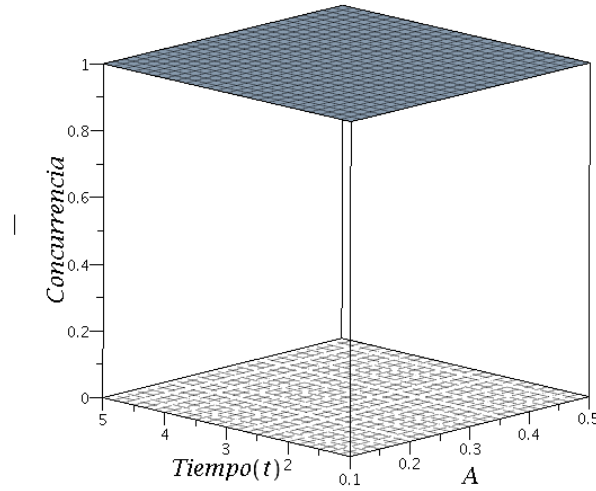


Figura 4.7: Concurrencia segundo estado de Bell

Fidelidad del segundo estado de Bell

$$F_2 = | \langle \psi(t) | (t = 0) \rangle | \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned}
 F_2 &= | \langle d_0(t)00 + d_1(t)01 + d_2(t)10 + d_3(t)11 | \frac{1}{\sqrt{2}}(01 - 10) \rangle \rangle \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} [d_0(t)\langle 00 | 01 \rangle - d_0(t)\langle 00 | 10 \rangle + d_1(t)\langle 01 | 01 \rangle \\
 &\quad - d_1(t)\langle 01 | 10 \rangle + d_2(t)\langle 10 | 01 \rangle - d_2(t)\langle 10 | 10 \rangle \\
 &\quad + d_3(t)\langle 11 | 01 \rangle - d_3(t)\langle 11 | 10 \rangle] \\
 F_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} [d_1(t) - d_2(t)] \tag{4.33}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_2 &= | \langle \cos(2At)(\cos(\Delta t) + i \sin(\Delta t))\eta \\
 &\quad + \sin(2At)(i \cos(\Delta t) - \sin(\Delta t))\pi \\
 &\quad [\frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle - |2\rangle)] \tag{4.34}
 \end{aligned}$$

$F_2 = 0$ La fidelidad para el segundo estado de Bell se vuelve nula al sustituir en la ecuación 4.33.

Tercer estado de Bell

$$| \phi^+(t) \rangle = e^{-i\hat{H}t} | \phi^+(t=0) \rangle$$

$$\begin{aligned}
 |\phi^+(t)\rangle &= [\cos(2At)(\cos(\Delta t) + i \sin(\Delta t))\eta \\
 &\quad + \sin(2At)(i \cos(\Delta t) - \sin(\Delta t))\pi] \\
 &\quad \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |3\rangle) \right] \\
 |\phi^+(t)\rangle &= 0
 \end{aligned} \tag{4.35}$$

Concurrencia del tercer estado de Bell

El tercer estado de Bell al sustituir en la formula de la concurrencia se obtiene un valor igual a cero.

Fidelidad del tercer estado de Bell

$$F_3 = |\langle \psi(t) | (t=0) \rangle| \tag{4.36}$$

$$\begin{aligned}
 F_3 &= | \langle d_0(t)00 + d_1(t)01 + d_2(t)10 + d_3(t)11 | \frac{1}{\sqrt{2}}(00 + 11) \rangle | \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} [d_0(t)\langle 00 | 00 \rangle + d_0(t)\langle 00 | 11 \rangle + d_1(t)\langle 01 | 00 \rangle \\
 &\quad + d_1(t)\langle 01 | 11 \rangle + d_2(t)\langle 10 | 00 \rangle + d_2(t)\langle 10 | 11 \rangle \\
 &\quad + d_3(t)\langle 11 | 00 \rangle + d_3(t)\langle 11 | 11 \rangle] \\
 F_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}} [d_0(t) + d_3(t)]
 \end{aligned} \tag{4.37}$$

$$\begin{aligned}
 F_3 = & \quad | \langle \cos (2At)(\cos (\Delta t) + i \sin (\Delta t))\eta \\
 & \quad + \sin (2At)(i \cos (\Delta t) - \sin (\Delta t))\pi \\
 & \quad [\frac{1}{\sqrt{2}}(| 0\rangle + | 3\rangle)] \rangle | \rangle \rangle \quad (4.38)
 \end{aligned}$$

$$F_3 = 0$$

La fidelidad para el tercer estado de Bell se vuelve nula al sustituir en la ecuación 4.37.

Cuarto estado de Bell

$$| \phi^-(t) \rangle = e^{-i\hat{H}t} | \phi^-(t=0) \rangle$$

Concurrencia del cuarto estado de Bell

$$\begin{aligned}
 | \phi^-(t) \rangle = & \quad [\cos (2At)(\cos (\Delta t) + i \sin (\Delta t))\eta \\
 & \quad + \sin (2At)(i \cos (\Delta t) - \sin (\Delta t))\pi] \\
 & \quad [\frac{1}{\sqrt{2}}(| 0\rangle - | 3\rangle)] \\
 | \phi^-(t) \rangle = & \quad 0 \quad (4.39)
 \end{aligned}$$

El cuarto estado de Bell al sustituir en la formula de la concurrencia se obtiene un valor igual a cero.

Fidelidad del cuarto estado de Bell

$$F_4 = | \langle \psi(t) | (t = 0) \rangle | \quad (4.40)$$

$$\begin{aligned}
 F_4 &= | \langle d_0(t)00 + d_1(t)01 + d_2(t)10 + d_3(t)11 | \frac{1}{\sqrt{2}}(00 - 11) \rangle | \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} [d_0(t)\langle 00 | 00 \rangle - d_0(t)\langle 00 | 11 \rangle + d_1(t)\langle 01 | 00 \rangle \\
 &\quad - d_1(t)\langle 01 | 11 \rangle + d_2(t)\langle 10 | 00 \rangle - d_2(t)\langle 10 | 11 \rangle \\
 &\quad + d_3(t)\langle 11 | 00 \rangle - d_3(t)\langle 11 | 11 \rangle] \\
 F_4 &= \frac{1}{\sqrt{2}} [d_0(t) - d_3(t)] \quad (4.41)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_4 &= | \langle \cos(2At)(\cos(\Delta t) + i \sin(\Delta t))\eta \\
 &\quad + \sin(2At)(i \cos(\Delta t) - \sin(\Delta t))\pi \\
 &\quad [\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |3\rangle)] \rangle | \quad (4.42)
 \end{aligned}$$

$$F_4 = 0$$

La fidelidad para el cuarto estado de Bell se vuelve nula al sustituir en la ecuación 4.41.

4.1.2.2. Estados aleatorio

Se utilizaron dos estados aleatorios para analizar el comportamiento de la concurrencia y la fidelidad cuántica en ellos.

Primer estado aleatorio

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\hat{H}t} |\psi_5(t=0)\rangle$$

$$|\psi_5(t=0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \quad (4.43)$$

$$\begin{aligned} |\psi_5(t=0)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \\ &= \frac{1}{2}(|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle) \\ C_5(t=0) &= 2 \left| -\frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{4}\right) \right| = 0 \end{aligned}$$

Condiciones iniciales

$$\begin{aligned} C_0(t=0) &= \frac{1}{2} & C_1(t=0) &= -\frac{1}{2} \\ C_2(t=0) &= \frac{1}{2} & C_3(t=0) &= -\frac{1}{2} \end{aligned} \quad (4.44)$$

$$\begin{aligned}
 |\psi(t)\rangle = & [\cos(2At)(\cos(\Delta t) + i \sin(\Delta t))\eta \\
 & + \sin(2At)(i \cos(\Delta t) - \sin(\Delta t))\pi] \\
 & [\frac{1}{2}(|0\rangle - \frac{1}{2}(|1\rangle + \frac{1}{2}(|2\rangle - \frac{1}{2}(|3\rangle)]
 \end{aligned}
 \tag{4.45}$$

Concurrencia primer estado aleatorio

$$C_5(t) = 2 |d_0 d_3 - d_1 d_2| \tag{4.46}$$

$$\begin{aligned}
 d_0 &= 0 \\
 d_1 &= \frac{1}{2} [-\cos(2At)(\cos(\Delta t) + i \sin(\Delta t)) \\
 &\quad + \sin(2At)(i \cos(\Delta t) - \sin(\Delta t))] \\
 d_2 &= \frac{1}{2} [\cos(2At)(\cos(\Delta t) + i \sin(\Delta t)) \\
 &\quad - \sin(2At)(i \cos(\Delta t) - \sin(\Delta t))] \\
 d_3 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_5(t) = 2 & \left| (0)(0) - \left[\frac{1}{2}(-\cos(2At)(\cos(\Delta t)) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + i \sin(\Delta t) + \sin(2At)(i \cos(\Delta t) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \sin(\Delta t)) \right] \left[\frac{1}{2}(\cos(2At)(\cos(\Delta t) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - i \sin(\Delta t)) - \sin(2At)(i \cos(\Delta t) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \sin(\Delta t)) \right] \right| \tag{4.47}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 = & \left| \frac{1}{2} \left[(2 \cos^2 \Delta t - 1)(2 \cos^2 2At - 1) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + (4 \cos(2At) \sin(2At) \cos(\Delta t) \sin(\Delta t)) \right] \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{2} \left[2i(2 \cos^2(\Delta t) - 1)(\cos(\Delta t) \sin(\Delta t) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \cos(2At) \sin(2At)) \right] \right| \tag{4.48}
 \end{aligned}$$

En la figura 4.8 se muestra que utilizando el primer estado aleatorio 4.43 se tiene una concurrencia variable al evolucionar con el tiempo con los valores de $\Delta = 0.8$ y $A = 0.1..0.5$.

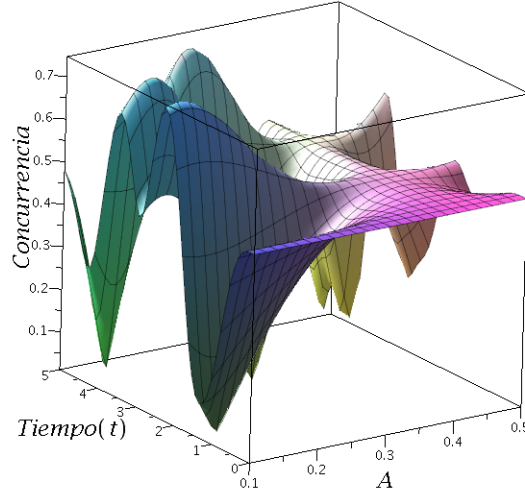


Figura 4.8: Concurrencia de primer estado aleatorio

Fidelidad primer estado aleatorio

$$F_5 = | \langle \psi(t) | (t = 0) \rangle | \quad (4.49)$$

$$\begin{aligned}
 F_5 &= | \langle d_0(t)00 + d_1(t)01 + d_2(t)10 + d_3(t)11 | \frac{1}{2}(00 - 01 + 10 - 11) \rangle | \\
 &= \frac{1}{2} [d_0(t)\langle 00 | 00 \rangle - d_0(t)\langle 00 | 01 \rangle + d_0(t)\langle 00 | 10 \rangle - d_0(t)\langle 00 | 11 \rangle \\
 &\quad + d_1(t)\langle 01 | 00 \rangle - d_1(t)\langle 01 | 01 \rangle + d_1(t)\langle 01 | 10 \rangle - d_1(t)\langle 01 | 11 \rangle \\
 &\quad + d_2(t)\langle 10 | 00 \rangle - d_2(t)\langle 10 | 01 \rangle + d_2(t)\langle 10 | 10 \rangle - d_2(t)\langle 10 | 11 \rangle \\
 &\quad + d_3(t)\langle 11 | 00 \rangle - d_3(t)\langle 11 | 01 \rangle + d_3(t)\langle 11 | 10 \rangle - d_3(t)\langle 11 | 11 \rangle]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_5 = & \quad | \langle \cos (2At)(\cos (\Delta t) + i \sin (\Delta t))\eta \\
 & \quad + \sin (2At)(i \cos (\Delta t) - \sin (\Delta t))\pi \\
 & \quad [\frac{1}{2}(| 0\rangle - | 1\rangle + | 2\rangle - | 3\rangle)] \rangle | \rangle \rangle \quad (4.50)
 \end{aligned}$$

$$F_5 = 0$$

La fidelidad para el primer estado aleatorio se vuelve nula al sustituir en la ecuación 4.50.

Segundo estado aleatorio

$$| \psi(t) \rangle = e^{-i\hat{H}t} | \psi_6(t=0) \rangle$$

$$| \psi_6(t=0) \rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} | 0 \rangle + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} | 1 \rangle + \frac{1}{\sqrt{6}} | 0 \rangle + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} | 1 \rangle \quad (4.51)$$

$$\begin{aligned}
 | \psi(t) \rangle = & \quad [\cos (2At)(\cos (\Delta t) + i \sin (\Delta t))\eta \\
 & \quad + \sin (2At)(i \cos (\Delta t) - \sin (\Delta t))\pi] \\
 & \quad [\frac{1}{\sqrt{6}} | 0 \rangle + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} | 1 \rangle + \frac{1}{\sqrt{6}} | 0 \rangle + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} | 1 \rangle] \quad (4.52)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |\psi_6(t)\rangle = & \left[\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} \cos(2At)(\cos(\Delta t) + i \sin(\Delta t)) \right. \\
 & + \frac{1}{\sqrt{6}} \sin(2At)(\sin(\Delta t) - i \cos(\Delta t)) \left. \right] |1\rangle \\
 & + \left[\frac{1}{\sqrt{6}} (\cos(2At)(\cos(\Delta t) + i \sin(\Delta t)) \right. \\
 & + \left. \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} \sin(2At)(\sin(\Delta t) - i \cos(\Delta t)) \right] |2\rangle \quad (4.53)
 \end{aligned}$$

Concurrencia segundo estado aleatorio

$$C_6(t) = 2 |d_0 d_3 - d_1 d_2| \quad (4.54)$$

$$\begin{aligned}
 d_0 &= 0 \\
 d_1 &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} \cos(2At)(\cos(\Delta t) + i \sin(\Delta t)) \\
 &+ \frac{1}{\sqrt{6}} \sin(2At)(\sin(\Delta t) - i \cos(\Delta t)) \\
 d_2 &= \frac{1}{\sqrt{6}} (\cos(2At)(\cos(\Delta t) + i \sin(\Delta t)) \\
 &+ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} \sin(2At)(\sin(\Delta t) - i \cos(\Delta t)) \\
 d_3 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_6(t) = 2 \left| (0)(0) - \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} \cos(2At)(\cos(\Delta t) + i \sin(\Delta t)) \right) \right. \right. \\
 \left. \left. + \frac{1}{\sqrt{6}} \sin(2At)(\sin(\Delta t) - i \cos(\Delta t)) \right] \right. \\
 \left. \left[\frac{1}{\sqrt{6}} (\cos(2At)(\cos(\Delta t) + i \sin(\Delta t)) \right) \right. \right. \\
 \left. \left. + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} \sin(2At)(\sin(\Delta t) - i \cos(\Delta t)) \right] \right| \quad (4.55)
 \end{aligned}$$

En la figura 4.9 se muestra que utilizando el primer estado aleatorio 4.51 se tiene una concurrencia variable al evolucionar con el tiempo con los valores de $\Delta = 0.8$ y $A = 0.1..0.5$.

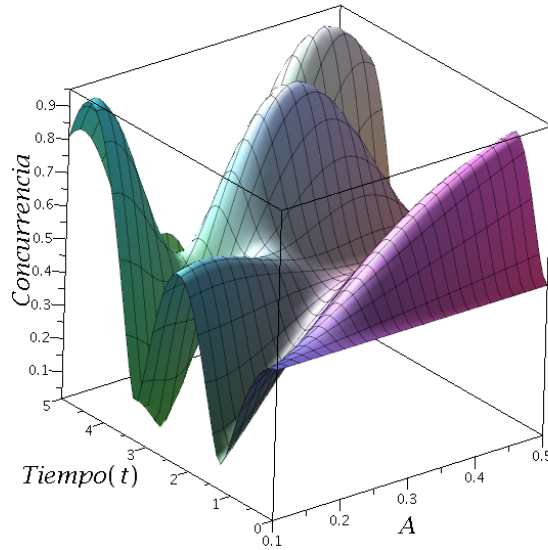


Figura 4.9: Concurrencia de estado aleatorio 2

Fidelidad segundo estado aleatorio

$$F_6 = | \langle \psi(t) | (t = 0) \rangle | \quad (4.56)$$

$$\begin{aligned} F_6 &= | \langle d_0(t)00 + d_1(t)01 + d_2(t)10 + d_3(t)11 | \frac{1}{\sqrt{6}}(00 + \sqrt{2}01 + 10 + \sqrt{2}11) \rangle | \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} [d_0(t)\langle 00 | 00 \rangle + \sqrt{2}d_0(t)\langle 00 | 01 \rangle + d_0(t)\langle 00 | 10 \rangle + \sqrt{2}d_0(t)\langle 00 | 11 \rangle \\ &+ d_1(t)\langle 01 | 00 \rangle + \sqrt{2}d_1(t)\langle 01 | 01 \rangle + d_1(t)\langle 01 | 10 \rangle + \sqrt{2}d_1(t)\langle 01 | 11 \rangle \\ &+ d_2(t)\langle 10 | 00 \rangle + \sqrt{2}d_2(t)\langle 10 | 01 \rangle + d_2(t)\langle 10 | 10 \rangle + \sqrt{2}d_2(t)\langle 10 | 11 \rangle \\ &+ d_3(t)\langle 11 | 00 \rangle + \sqrt{2}d_3(t)\langle 11 | 01 \rangle + d_3(t)\langle 11 | 10 \rangle + \sqrt{2}d_3(t)\langle 11 | 11 \rangle] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_6 &= | \langle \cos(2At)(\cos(\Delta t) + i \sin(\Delta t))\eta \\ &+ \sin(2At)(i \cos(\Delta t) - \sin(\Delta t))\pi \\ &[\frac{1}{\sqrt{6}}(| 0 \rangle + \sqrt{2} | 1 \rangle + | 2 \rangle + \sqrt{2} | 3 \rangle)] \end{aligned} \quad (4.57)$$

En la figura 4.10 se muestra que utilizando el segundo estado aleatorio se tiene una fidelidad máxima con los valores de $\Delta = 0.8$ y $A = 0.1..0.5$

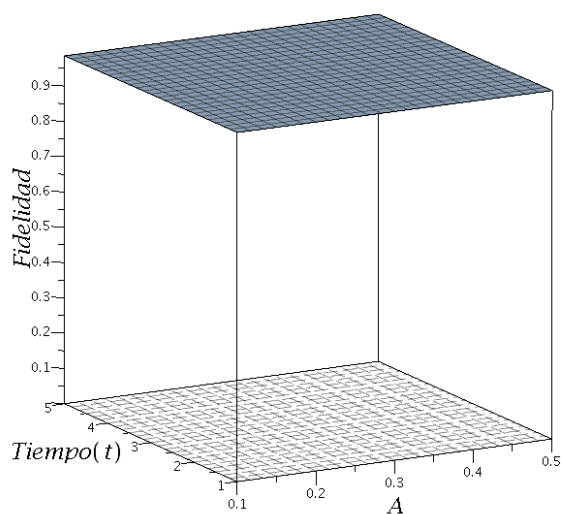


Figura 4.10: Fidelidad de estado aleatorio 2

En los anexos A.1.1. se muestran los procesos realizados en el software maple para un sistema de dos qubits.

4.2. Entrelazamiento para un sistema de tres qubits

Se realizaron las operaciones que permite llegar a la expresión para poder calcular el tres tangle como medida de entrelazamiento para un sistema de tres qubits.

4.2.1. Tres tangle

Para calcular el tres tangle, se utilizó el hamiltoniano de Heisenberg para una computadora cuántica de diamante de tres qubits (\widehat{H}). Se maneja la notación decimal y binaria en la representación de los tres qubits.

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= d_0 |0\rangle + d_1 |1\rangle + d_2 |2\rangle + d_3 |3\rangle + d_4 |4\rangle + d_5 |5\rangle + d_6 |6\rangle + d_7 |7\rangle \\ |\psi\rangle &= d_0 |000\rangle + d_1 |001\rangle + d_2 |010\rangle + d_3 |011\rangle + d_4 |100\rangle + d_5 |101\rangle + d_6 |110\rangle + d_7 |111\rangle \end{aligned}$$

En la compuerta Toffoli si los dos primeros qubits son unos, el tercero cambia de estado; si es uno se vuelve cero, si es cero se vuelve uno.

$$\begin{aligned} |000\rangle &\rightarrow |000\rangle & d_0(t=0) &= 0 \\ |001\rangle &\rightarrow |001\rangle & d_1(t=0) &= 0 \\ |010\rangle &\rightarrow |010\rangle & d_2(t=0) &= 0 \\ |011\rangle &\rightarrow |011\rangle & d_3(t=0) &= 0 \\ |100\rangle &\rightarrow |100\rangle & d_4(t=0) &= 0 \\ |101\rangle &\rightarrow |101\rangle & d_5(t=0) &= 0 \\ |110\rangle &\rightarrow |111\rangle & d_6(t=0) &= 1 \\ |111\rangle &\rightarrow |110\rangle & d_7(t=0) &= 0 \end{aligned}$$

Utilizando la ecuación de Schrödinger para la compuerta Toffoli se tiene

$$\begin{aligned}
 \langle 0 | \hat{H} | \psi(t) \rangle &= \langle 0 | \frac{id}{dt} | \psi(t) \rangle \\
 \langle 1 | \hat{H} | \psi(t) \rangle &= \langle 1 | \frac{id}{dt} | \psi(t) \rangle \\
 \langle 2 | \hat{H} | \psi(t) \rangle &= \langle 2 | \frac{id}{dt} | \psi(t) \rangle \\
 \langle 3 | \hat{H} | \psi(t) \rangle &= \langle 3 | \frac{id}{dt} | \psi(t) \rangle \\
 \langle 4 | \hat{H} | \psi(t) \rangle &= \langle 4 | \frac{id}{dt} | \psi(t) \rangle \\
 \langle 5 | \hat{H} | \psi(t) \rangle &= \langle 5 | \frac{id}{dt} | \psi(t) \rangle \\
 \langle 6 | \hat{H} | \psi(t) \rangle &= \langle 6 | \frac{id}{dt} | \psi(t) \rangle \\
 \langle 7 | \hat{H} | \psi(t) \rangle &= \langle 7 | \frac{id}{dt} | \psi(t) \rangle
 \end{aligned}$$

donde al desarrollar \hat{H} genera

$$\begin{aligned}
 \hat{H} = & -\{\hbar(w_1 S_z^1 + w_2 S_z^2 + w_3 S_z^3) - J(S_z^1 S_z^2 + S_z^2 S_z^3 + S_z^3 S_z^4) - J'(S_z^1 S_z^3 + S_z^2 S_z^4 + S_z^3 S_z^5) \\
 & + \frac{\Omega}{2}(e^{\theta_1} S_-^1 + e^{-\theta_1} S_+^1 + e^{2\theta_2} S_-^2 + e^{-2\theta_2} S_+^2 + e^{3\theta_3} S_-^3 + e^{-3\theta_3} S_+^3)\}
 \end{aligned}$$

y simplificando se obtiene la ecuación 4.58

$$\begin{aligned} \hat{H} = & -\{\hbar(w_1 S_z^1 + w_2 S_z^2 + w_3 S_z^3) - J(S_z^1 S_z^2 + S_z^2 S_z^3) - J'(S_z^1 S_z^3) \\ & + \frac{\Omega}{2}(e^{i\theta_1} S_-^1 + e^{-i\theta_1} S_+^1 + e^{i\theta_2} S_-^2 + e^{-i\theta_2} S_+^2 + e^{i\theta_3} S_-^3 + e^{-i\theta_3} S_+^3)\} \end{aligned} \quad (4.58)$$

Sustituyendo

$$\begin{aligned} \langle 0 | \hat{H} | \psi(t) \rangle = & \langle 0 | \hat{H} | (d_0 | 0) + d_1 | 1) + d_2 | 2) + d_3 | 3) \\ & + d_4 | 4) + d_5 | 5) + d_6 | 6) + d_7 | 7) \rangle \end{aligned} \quad (4.59)$$

obteniendo finalmente

$$\begin{aligned} \langle 0 | \hat{H} | \psi(t) \rangle = & \langle 0 | -\{\hbar(w_1 S_z^1 + w_2 S_z^2 + w_3 S_z^3) - J(S_z^1 S_z^2 + S_z^2 S_z^3) \\ & - J'(S - z^1 z^3) + \frac{\Omega}{2}(e^{\theta_1} S_-^1 + e^{-\theta_1} S_+^1 + e^{2\theta_2} S_-^2 + e^{-2\theta_2} S_+^2 \\ & + e^{3\theta_3} S_-^3 + e^{-3\theta_3} S_+^3)\} | (d_0 | 0) + d_1 | 1) + d_2 | 2) + d_3 | 3) \\ & + d_4 | 4) + d_5 | 5) + d_6 | 6) + d_7 | 7) \rangle \end{aligned} \quad (4.60)$$

al realizar las operaciones se genera la expresión para d_0

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} d_0(t) = & -i[-\hbar w_1 | 000\rangle - \hbar w_2 | 000\rangle - \hbar w_3 | 000\rangle + J | 000\rangle + J | 000\rangle \\ & + J' | 000\rangle - \frac{\Omega}{2} e^{i\theta_1} | 001\rangle - \frac{\Omega}{2} e^{-i\theta_1} | 010\rangle - \frac{\Omega}{2} e^{i\theta_2} | 010\rangle - \frac{\Omega}{2} e^{-i\theta_2} | 010\rangle \\ & - \frac{\Omega}{2} e^{i\theta_3} | 100\rangle - \frac{\Omega}{2} e^{-i\theta_3} | 100\rangle] \end{aligned}$$

De acuerdo con Soberanes y Ávila (2019) la ecuación diferencial de d_0 queda expresada en 4.61

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}d_0(t) = & -i [(-\hbar(w_1 + w_2 + w_3) + 2J + J')d_0 \\ & - \frac{\Omega}{2}e^{-i\theta_1}d_1 - \frac{\Omega}{2}e^{-i\theta_3}d_4 - \frac{\Omega}{2}e^{-i\theta_2}d_2] \end{aligned} \quad (4.61)$$

al realizar las operaciones se genera la expresión para d_1

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}d_1(t) = & -i [\hbar w_1 |001\rangle - \hbar w_2 |001\rangle - \hbar w_3 |001\rangle + J |001\rangle - J |001\rangle \\ & + J' |001\rangle - \frac{\Omega}{2}e^{i\theta_1}(0) - \frac{\Omega}{2}e^{-i\theta_1} |000\rangle - \frac{\Omega}{2}e^{i\theta_2} |011\rangle - \frac{\Omega}{2}e^{-i\theta_2}(0) \\ & - \frac{\Omega}{2}e^{i\theta_3} |101\rangle - \frac{\Omega}{2}e^{-i\theta_3}(0)] \end{aligned}$$

De acuerdo con Soberanes y Ávila (2019) la ecuación diferencial de d_1 queda expresada en 4.62

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}d_1(t) = & -i [(\hbar(w_1 - w_2 - w_3) + J')d_1 \\ & - \frac{\Omega}{2}e^{i\theta_1}d_0 - \frac{\Omega}{2}e^{-i\theta_2}d_3 - \frac{\Omega}{2}e^{-i\theta_3}d_5] \end{aligned} \quad (4.62)$$

al realizar las operaciones se genera la expresión para d_2

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}d_2(t) = & -i[-\hbar w_1 | 010\rangle + \hbar w_2 | 010\rangle - \hbar w_3 | 010\rangle - J | 010\rangle - J | 010\rangle \\ & + J' | 010\rangle - \frac{\Omega}{2}e^{i\theta_1} | 011\rangle - \frac{\Omega}{2}e^{-i\theta_1}(0) - \frac{\Omega}{2}e^{i\theta_2}(0) - \frac{\Omega}{2}e^{-i\theta_2} | 000\rangle \\ & - \frac{\Omega}{2}e^{i\theta_3} | 110\rangle - \frac{\Omega}{2}e^{-i\theta_3}(0)] \end{aligned}$$

De acuerdo con Soberanes y Ávila (2019) la ecuación diferencial de d_0 queda expresada en 4.63

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}d_2(t) = & -i[(\hbar(-w_1 + w_2 - w_3) - 2J + J')d_2 \\ & - \frac{\Omega}{2}e^{-i\theta_1}d_3 - \frac{\Omega}{2}e^{i\theta_2}d_0 - \frac{\Omega}{2}e^{-i\theta_3}d_6] \end{aligned} \quad (4.63)$$

al realizar las operaciones se genera la expresión para d_3

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}d_3(t) = & -i[\hbar w_1 | 011\rangle + \hbar w_2 | 011\rangle - \hbar w_3 | 011\rangle + J | 011\rangle - J | 011\rangle \\ & - J' | 011\rangle - \frac{\Omega}{2}e^{i\theta_1}(0) - \frac{\Omega}{2}e^{-i\theta_1} | 010\rangle - \frac{\Omega}{2}e^{i\theta_2}(0) - \frac{\Omega}{2}e^{-i\theta_2} | 001\rangle \\ & - \frac{\Omega}{2}e^{i\theta_3} | 111\rangle - \frac{\Omega}{2}e^{-i\theta_3}(0)] \end{aligned}$$

De acuerdo con Soberanes y Ávila (2019) la ecuación diferencial de d_3 queda

expresada en 4.64

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}d_3(t) = & -i [(\hbar(w_1 + w_2 - w_3) - J')d_3 \\ & - \frac{\Omega}{2}e^{i\theta_1}d_2 - \frac{\Omega}{2}e^{i\theta_2}d_1 - \frac{\Omega}{2}e^{-i\theta_3}d_7] \end{aligned} \quad (4.64)$$

al realizar las operaciones se genera la expresión para d_4

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}d_4(t) = & -i [-\hbar w_1 | 100\rangle - \hbar w_2 | 100\rangle + \hbar w_3 | 100\rangle + J | 100\rangle - J' | 100\rangle \\ & - \frac{\Omega}{2}e^{i\theta_1} | 101\rangle - \frac{\Omega}{2}e^{-i\theta_1}(0) - \frac{\Omega}{2}e^{i\theta_2} | 110\rangle - \frac{\Omega}{2}e^{-i\theta_2}(0) - \frac{\Omega}{2}e^{i\theta_3}(0) \\ & - \frac{\Omega}{2}e^{-i\theta_3} | 000\rangle] \end{aligned}$$

De acuerdo con Soberanes y Ávila (2019) la ecuación diferencial de d_4 queda expresada en 4.65

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}d_4(t) = & -i [(-\hbar(w_1 + w_2 - w_3) - J')d_4 \\ & - \frac{\Omega}{2}e^{i\theta_1}d_5 - \frac{\Omega}{2}e^{i\theta_2}d_6 - \frac{\Omega}{2}e^{-i\theta_3}d_0] \end{aligned} \quad (4.65)$$

al realizar las operaciones se genera la expresión para d_5

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}d_5(t) = & -i [\hbar w_1 | 101\rangle - \hbar w_2 | 101\rangle + \hbar w_3 | 101\rangle - 2J | 101\rangle - J' | 101\rangle \\ & - \frac{\Omega}{2}e^{i\theta_1}(0) - \frac{\Omega}{2}e^{-i\theta_1} | 100\rangle - \frac{\Omega}{2}e^{i\theta_2} | 111\rangle - \frac{\Omega}{2}e^{-i\theta_2}(0) \\ & - \frac{\Omega}{2}e^{i\theta_3}(0) - \frac{\Omega}{2}e^{-i\theta_3} | 001\rangle] \end{aligned}$$

De acuerdo con Soberanes y Ávila (2019) la ecuación diferencial de d_5 queda expresada en 4.66

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}d_5(t) = & -i [(\hbar(w_1 - w_2 + w_3) - 2J + J')d_5 \\ & - \frac{\Omega}{2}e^{-i\theta_1}d_4 - \frac{\Omega}{2}e^{i\theta_2}d_7 - \frac{\Omega}{2}e^{-i\theta_3}d_1] \end{aligned} \quad (4.66)$$

al realizar las operaciones se genera la expresión para d_6

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}d_6(t) = & -i [-\hbar w_1 | 110\rangle + \hbar w_2 | 110\rangle + \hbar w_3 | 110\rangle - J' | 110\rangle \\ & - \frac{\Omega}{2}e^{i\theta_1} | 111\rangle - \frac{\Omega}{2}e^{-i\theta_1}(0) - \frac{\Omega}{2}e^{i\theta_2}(0) - \frac{\Omega}{2}e^{-i\theta_2} | 100\rangle \\ & - \frac{\Omega}{2}e^{i\theta_3}(0) - \frac{\Omega}{2}e^{-i\theta_3} | 010\rangle] \end{aligned}$$

De acuerdo con Soberanes y Ávila (2019) la ecuación diferencial de d_6 queda expresada en 4.67

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}d_6(t) = & -i [(-\hbar(w_1 - w_2 - w_3) - J')d_6 \\ & - \frac{\Omega}{2}e^{i\theta_1}d_7 - \frac{\Omega}{2}e^{-i\theta_2}d_4 - \frac{\Omega}{2}e^{-i\theta_3}d_2] \end{aligned} \quad (4.67)$$

al realizar las operaciones se genera la expresión para d_7

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}d_7(t) = & -i [\hbar w_1 | 111\rangle + \hbar w_2 | 111\rangle + \hbar w_3 | 111\rangle + 2J | 111\rangle + J' | 111\rangle \\ & - \frac{\Omega}{2} e^{i\theta_1}(0) - \frac{\Omega}{2} e^{-i\theta_1} | 110\rangle - \frac{\Omega}{2} e^{i\theta_2}(0) - \frac{\Omega}{2} e^{-i\theta_2} | 101\rangle \\ & - \frac{\Omega}{2} e^{i\theta_3}(0) - \frac{\Omega}{2} e^{-i\theta_3} | 011\rangle] \end{aligned}$$

De acuerdo con Soberanes y Ávila (2019) la ecuación diferencial de d_7 queda expresada en 4.68

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}d_7(t) = & -i [(\hbar(w_1 + w_2 + w_3) + 2J + J')d_7 \\ & - \frac{\Omega}{2} e^{-i\theta_1}d_6 - \frac{\Omega}{2} e^{-i\theta_2}d_5 - \frac{\Omega}{2} e^{-i\theta_3}d_3] \end{aligned} \quad (4.68)$$

El tres tangle se puede calcular por medio de la expresión de entrelazamiento residual

$$\tau_{res}(\psi) = 4 | D_1 - 2D_2 + 4D_3 |, \quad (4.69)$$

$$D_1 = d_0^2(t)d_7^2(t) + d_1^2(t)d_6^2(t) + d_2^2(t)d_5^2(t) + d_3^2(t)d_4^2(t)$$

$$\begin{aligned} D_2 = & d_0(t)d_1(t)d_6(t)d_7(t) + d_0(t)d_2(t)d_5(t)d_7(t) + \\ & + d_0(t)d_3(t)d_4(t)d_7(t) + d_1(t)d_2(t)d_5(t)d_6(t) + \\ & + d_1(t)d_3(t)d_4(t)d_6(t) + d_2(t)d_3(t)d_4(t)d_5(t) \end{aligned}$$

$$D_3 = d_0(t)d_6(t)d_5(t)d_3(t) + d_4(t)d_2(t)d_1(t)d_7(t)$$

el tres tangle queda denotado en la ecuación 4.70

$$\tau_3 = \sqrt{\tau_{res}} \quad (4.70)$$

4.2.1.1. Tres tangle estado GHZ

Utilizando el estado inicial GHZ

$$|GHZ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|000\rangle + |111\rangle]$$

En la figura 4.11 se muestra la probabilidad del sistema de tres qubits para el estado inicial GHZ.

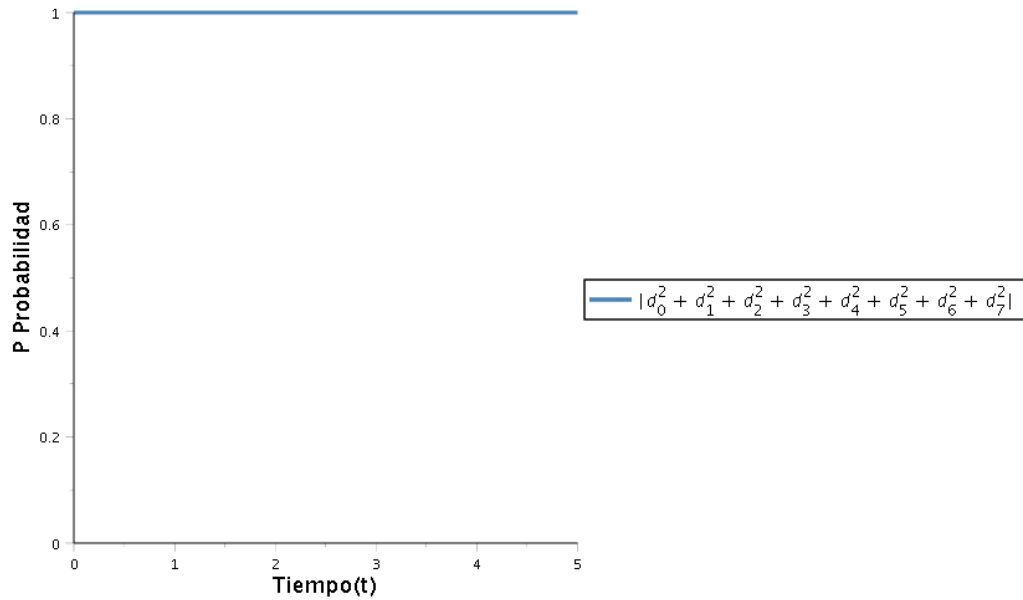


Figura 4.11: Probabilidad del sistema de tres qubits para el estado inicial GHZ

En la figura 4.12 se muestra que utilizando el estado inicial GHZ se tiene un tres tangle igual a uno lo que denota un entrelazamiento máximo.

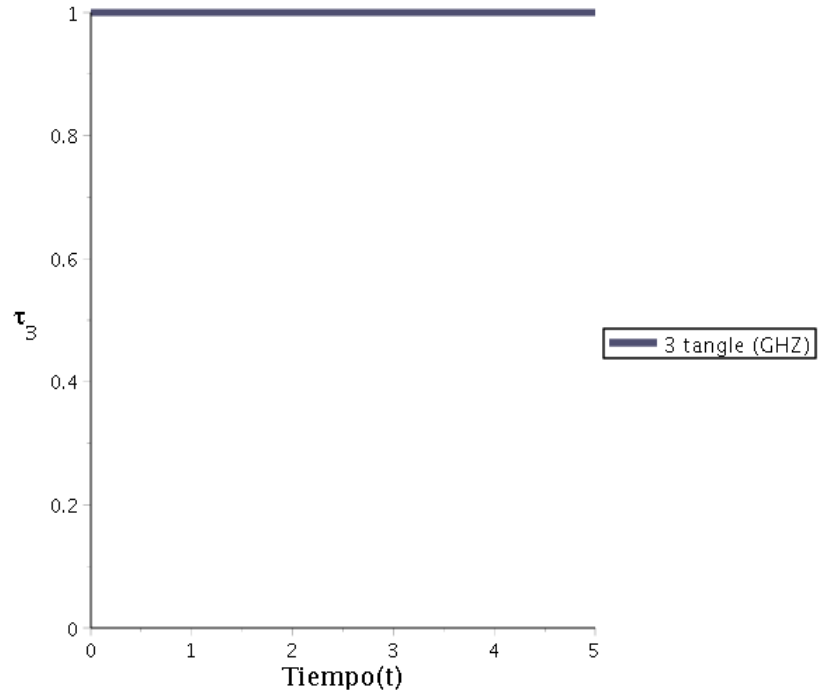


Figura 4.12: Tres tangle del estado inicial GHZ

4.2.1.2. Tres tangle estado W

Utilizando un estado inicial W

$$\begin{aligned}
 |w\rangle = & \frac{1}{\sqrt{3}}[|100\rangle + |010\rangle + |001\rangle] \\
 & \frac{1}{\sqrt{3}}[|4\rangle + |2\rangle + |1\rangle]
 \end{aligned}
 \tag{4.71}$$

En la figura 4.13 se muestra la probabilidad del sistema de tres qubits para el estado inicial W.

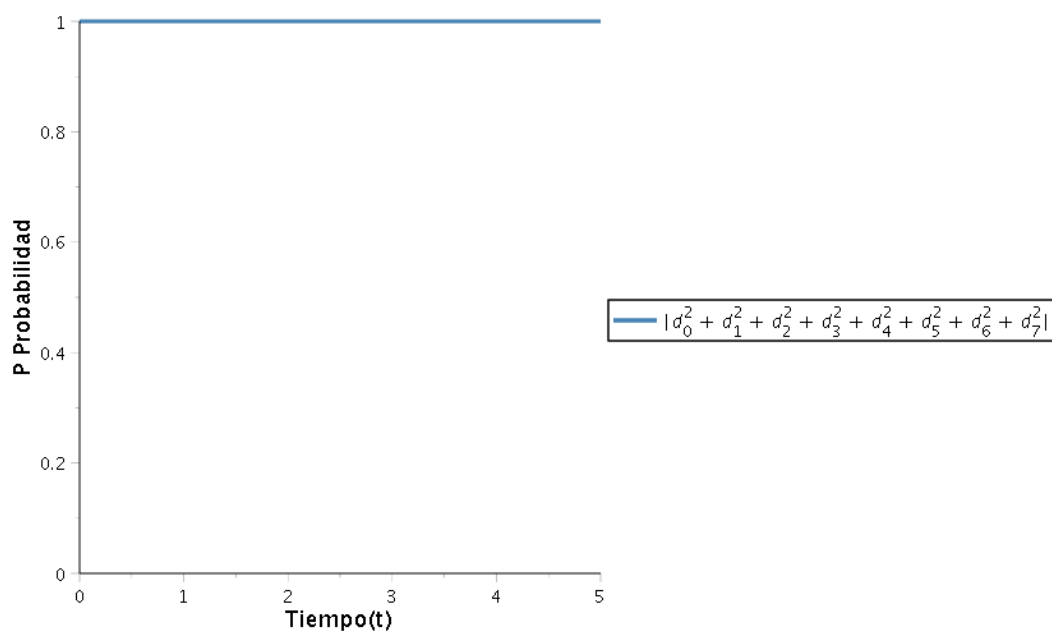


Figura 4.13: Probabilidad del sistema de tres qubits para el estado inicial W

En la figura 4.14 se muestra que utilizando el estado inicial W se tiene un tres tangle igual a cero.

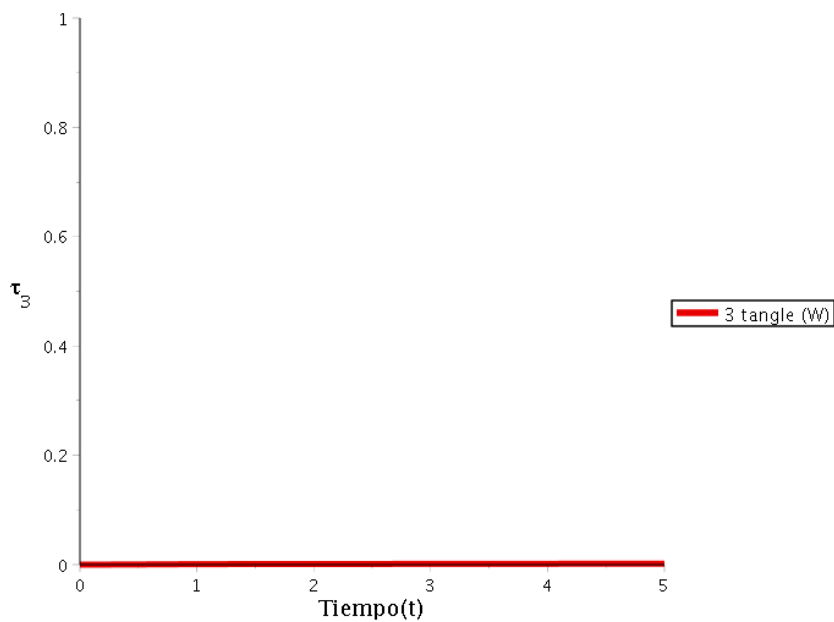


Figura 4.14: Tres tangle del estado inicial W

El sistema de ecuaciones diferenciales que se obtuvo al desarrollar el hamiltoniano de Heisenberg expresa el comportamiento que deben cumplir los estados iniciales GHZ y W.

En el anexo A.1.2 se presentan los procesos realizados en el software maple para el sistema de tres qubits.

A continuación, se presentan los productos académicos desarrollados durante el estudio del doctorado.

4.3. Productos académicos de investigación en el doctorado

Se enlistan las publicaciones de artículos:

Ávila Aoki, M. y Soberanes Martín, F. (2019). Reseña de una interpretación de discordia cuántica. *CIENCIA ergo-sum*, 26(2). <https://doi.org/10.30878/ces.v26n2a11>

En el anexo A.2.1 se presenta la primer página del artículo.

Soberanes, F., y Ávila, M. (2019). Operador potencia como testigo de la decoherencia en la ejecución de la compuerta de Toffoli en una computadora cuántica de diamante. *Acta Universitaria* 29, e2409. doi. <http://doi.org/10.15174.au.2019.2409>

En el anexo A.2.2 se presenta la primer página del artículo.

Soberanes, F., y Ávila, M. (2020). Execution of Fredkin gate by a set of free fermions. *Pramana*. <https://doi.org/10.1007/s12043-020-1931-z>

En el anexo A.2.3 se presenta la primer página del artículo.

Conclusiones/Trabajos futuros

En esta sección se presentan las conclusiones después de desarrollar la investigación, además de las líneas de investigación que se pueden continuar.

5.1. Conclusiones

En esta investigación se analizó el problema relacionado con la posibilidad de obtener medidas de distancia entre estados cuánticos a partir de medidas generales de distinguibilidad entre distribuciones de probabilidad. Dada la complejidad que presenta el análisis del problema general para sistemas cuánticos de dos y tres qubits descritos por matrices densidad actuando sobre un hamiltoniano de Heisenberg.

Primero mostramos que la conservación de la probabilidad $|d_0(t)|_2 + |d_1(t)|_2 + |d_2(t)|_2 + |d_3(t)|_2 + |d_4(t)|_2 + |d_5(t)|_2 + |d_6(t)|_2 + |d_7(t)|_2 = 1$.

Las expresiones obtenidas para calcular el entrelazamiento y la fidelidad para un sistema de dos qubits, permite observar como tal la existencia del entrelazamiento cuántico y su evolución a través del tiempo. Se hicieron pruebas de funcionamiento del hamiltoniano de Heisenberg con la compuerta SWAP, la figura 4.1, permite observar el correcto funcionamiento del mismo.

Se logró obtener la expresión matemática que permite hacer los cálculos de concurrencia y fidelidad cuántica para dos qubits.

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= [(\cos(2At)(\cos(\Delta t) + i \sin(\Delta t))\eta + (\sin(2At)(i \cos(\Delta t) \\ &\quad - \sin(\Delta t))\pi) |\psi(t=0)\rangle \end{aligned} \quad (5.1)$$

Cuando el estado inicial para calcular el entrelazamiento es un estado de Bell o un estado máximamente entrelazado genérico, muestra una concurrencia máxima pero una fidelidad inconsistente o nula.

Las relaciones analíticas mostraron que bajo las condiciones establecidas para el Hamiltoniano en tres qubits muestra su evolución y variación de la concurrencia en función del tiempo la cual conspira a entrelazarse.

Se cumplieron los objetivos general y específicos de:

Aplicar una compuerta que depende del tiempo a estados de dos y tres qubits para obtener una función, la cual sea utilizable para el cálculo de la concurrencia y fidelidad, se cumplió al realizar los cálculos necesarios para llegar a las funciones que dependen del tiempo para obtener la concurrencia y fidelidad.

Evaluar el comportamiento temporal del entrelazamiento cuántico y de la fidelidad para sistemas de dos y tres qubits interactuando a través de un Hamiltoniano de Heisenberg, este se logró al realizar las gráficas que muestran la evolución en el tiempo de la concurrencia y la fidelidad (Figuras 4.5-4.14).

Determinar la concurrencia y el 3-tangle como función del tiempo para analizar su comportamiento y por último, establecer y estudiar la fidelidad en función del tiempo, esto permitirá tener una herramienta más, para el desarrollo de la computadora cuántica, se alcanzó el objetivo con el desarrollo del sistema de ocho ecuaciones diferenciales lineales de primer orden que permite hacer los cálculos del tres tangle y fidelidad cuántica para tres qubits.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}d_0(t) = & -i [(-\hbar(w_1 + w_2 + w_3) + 2J + J')d_0 \\ & - \frac{\Omega}{2}e^{-i\theta_1}d_1 - \frac{\Omega}{2}e^{-i\theta_3}d_4 - \frac{\Omega}{2}e^{-i\theta_2}d_2]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}d_1(t) = & -i [\hbar(w_1 - w_2 - w_3) + J']d_1 \\ & - \frac{\Omega}{2}e^{i\theta_1}d_0 - \frac{\Omega}{2}e^{-i\theta_2}d_3 - \frac{\Omega}{2}e^{-i\theta_3}d_5]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}d_2(t) = & -i [\hbar(-w_1 + w_2 - w_3) - 2J + J']d_2 \\ & - \frac{\Omega}{2}e^{-i\theta_1}d_3 - \frac{\Omega}{2}e^{i\theta_2}d_0 - \frac{\Omega}{2}e^{-i\theta_3}d_6]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}d_3(t) = & -i [\hbar(w_1 + w_2 - w_3) - J']d_3 \\ & - \frac{\Omega}{2}e^{i\theta_1}d_2 - \frac{\Omega}{2}e^{i\theta_2}d_1 - \frac{\Omega}{2}e^{-i\theta_3}d_7]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}d_4(t) = & -i [(-\hbar(w_1 + w_2 - w_3) - J')d_4 \\ & - \frac{\Omega}{2}e^{i\theta_1}d_5 - \frac{\Omega}{2}e^{i\theta_2}d_6 - \frac{\Omega}{2}e^{-i\theta_3}d_0]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}d_5(t) = & -i [\hbar(w_1 - w_2 + w_3) - 2J + J']d_5 \\ & - \frac{\Omega}{2}e^{-i\theta_1}d_4 - \frac{\Omega}{2}e^{i\theta_2}d_7 - \frac{\Omega}{2}e^{-i\theta_3}d_1]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}d_6(t) = & -i [(-\hbar(w_1 - w_2 - w_3) - J')d_6 \\ & - \frac{\Omega}{2}e^{i\theta_1}d_7 - \frac{\Omega}{2}e^{-i\theta_2}d_4 - \frac{\Omega}{2}e^{-i\theta_3}d_2]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}d_7(t) = & -i [\hbar(w_1 + w_2 + w_3) + 2J + J']d_7 \\ & - \frac{\Omega}{2}e^{-i\theta_1}d_6 - \frac{\Omega}{2}e^{-i\theta_2}d_5 - \frac{\Omega}{2}e^{-i\theta_3}d_3]\end{aligned}$$

El sistema propuesto por Soberanes y Ávila (2019) se utilizó como herramienta para el desarrollo de un artículo Operador potencia como testigo de la decoherencia en la ejecución de la compuerta de Toffoli en una computadora cuántica de diamante.

Respecto a la pregunta de investigación principal ¿Cuál es la evolución en el tiempo del entrelazamiento cuántico y de la fidelidad de un sistema de dos qubits interactuando a través de un hamiltoniano de Heisenberg? Con el desarrollo del hamiltoniano de Heisenberg para un sistema de dos qubits se pudo obtener la función (4.16) con la cual se puede calcular la evolución en el tiempo del entrelazamiento cuántico y de la fidelidad.

Con respecto a las preguntas subordinadas:

¿Cuál es la evolución en el tiempo del entrelazamiento cuántico de un sistema de tres qubits interactuando a través de un Hamiltoniano de Heisenberg? Con el desarrollo del hamiltoniano de Heisenberg para un sistema de tres qubits se pudo obtener el sistema de ecuaciones (4.61-4.68) con el cual se puede calcular la evolución en el tiempo del entrelazamiento cuántico y de la fidelidad.

¿Qué diferencias existen en el entrelazamiento cuántico y la fidelidad de los sistemas de dos y tres qubits que interactúan a través de un Hamiltoniano de Heisenberg? El entrelazamiento y la fidelidad en los casos estudiados de dos y tres qubits, mostraron que no existe una relación directa entre ellas, el comporta-

miento de los sistemas muestran que pueden tener entrelazamiento y tener o no fidelidad. Estos resultados permiten identificar las características necesarias para que se puedan cumplir las dos componentes.

La hipótesis que se planteó en la investigación fue: Si se conocen las expresiones matemáticas de operador de evolución en el tiempo de Heisenberg entonces se podrán determinar el entrelazamiento y la fidelidad de dos y tres qubits como función del tiempo. Se corroboró al validar los datos que se obtuvieron en el desarrollo y las gráficas creadas, donde se puede observar el comportamiento con diferentes estados iniciales en sistemas de dos y tres qubits.

5.2. Trabajos futuros

Naturalmente quedan algunos aspectos interesantes para analizar en el problema planteado. A continuación, se enumeran algunos de los aspectos que se podrían estudiar:

1. Estudiar en profundidad las propiedades de las medidas encontradas.
2. Extender el análisis para los casos n contemplados.
3. Extender el análisis para los casos de fidelidad para tres qubits.
4. Comparar los resultados con otras métricas conocidas.

Al abordar los aspectos señalados se podrá contribuir a la computación cuántica y a la obtención de herramientas para la creación de la computadora cuántica.

Bibliografía

- Aharonov, D. y Ben-Or (2006). *Fault Tolerant Quantum Computation with Constant Error Rate*. quant-ph/9906129.
- Angulo, J., Antolin, J., Zarzo, A., y Cuchi, J. (1999). Phys.
- Anthony, J. (2002). *Exploring the limits of Computers editor Feynman and Computation*. Westview.
- Atre, R., Kumar, A., Kumar, C., y Panigrahi, P. (2004). Phys.
- Aydiner, E., Orta, C., Sever, R., y J., M. I. (2008). Phys.
- Barenco, A., Bennett, C., Cleve, R., DiVincenzo, D., Margolus, N., Shor, P. and Sleator, T., Smolin, J., y Weinfurter, H. (1995). *Elementary Gates for Quantum Computation*, Vol. 52. Phys. Rev. A.
- Beckner, W. (1975). Inequalities in fourier analysis.
- Benioff, P. (1982). *Quantum Mechanical Hamiltonian Models of Turing Machines*. J. Stat. Phys., vol. 29.

- Bennett, C. (1973). *Logical Reversibility of Computation*. IBM Journal of Research and Development.
- Bennett, C. (1985). *Fundamental Physical Limits of Computation*, (5 ed., Vol. 253, pp. 23-25). Scientific American.
- Bialynicki-Birula, I. y Mycielski, J. (1975). Commun. math. phys.
- Brillouin, L. (1965). *Science and Information Theory*. Westview, New York.
- Buzek, V., Keitel, C. H., y Knight, P. (1995). Phys. rev.
- Chen, S., Wang, L., Gu, S., y Y., W. (2018). J. phys. a: Math.
- Coffey, M. (2007). Phys.
- Dehesa, J., Martínez-Finkelshtein, A., y Sorokin, V. (2006). Phys.
- Dehesa, J., Van Assche, W., y Yáñez, R. (1997). Methods appl. math.
- Dehesa, J., Yáñez, R., Aptekarev, A., y Buyarov, V. (1998). *Math. Phys.*
- Deutsch, D. (1985). *Quantum theory, the Church-Turing Principle and the universal quantum computer*. Proc. Roy. Soc., London.
- Dirac, P. A. M. (Oxford, 1947). The principles of quantum mechanics. *Clarendon Press*.
- Douglas, R. G. (1972). *Banach Algebra Techniques in Operator Theory*. Academic Press, New York.

- Dür, W., Vidal, G., y Cirac, J. (2000). Phys. rev.
- Everett, H. (1973). *The Many World Interpretation of Quantum Mechanics*. Princeton University Press.
- Feynman, R. (1996). *Feynman Lectures on Computingeparation System*. Addison-Wesley.
- Finkel, R. W. (1987). Phys.
- Galindo, A. y Pascual, P. (1978). *Quantum Mechanic*. Springer, Berlin.
- Gantmacher, F. R. (1959). *Applications of the Theory of Matrices*. Interscience, New York.
- García, J. (2004). Factorización polinomial de números enteros. 7.2.
- Gillespie, D. T. (1976). *Introducción a la mecánica cuántica*. Reverté S. A., Barcelona.
- Gradshteyn, I. y Ryzhik, I. (2000). *Tables of Integrals, Series, and Products*. Academic Press, New York.
- Gratton, L. y Scott, A. (2017). *La Vida de 100 Años*. Versus, España.
- Hein, M., Dür, W., Eisert, J., Raussendorf, R., den Nest, M. V., y Briegel, H. J. (2006). *Entanglement in graph states and its applications*, Vol. 162. School of Physics, Amsterdam.
- Heisenberg, W. Z. (1928). *Phys*, 49, 619.

- Hewitt, P. (1995). *Física Conceptual*. Addison-Wesley, New York.
- Hirschmann, I. J. (1957). Am. j. math.
- Kumar, A. (2005). Phys.
- Landauer, R. (1961). *Irreversibility and Heat Generation in the omputing Process*,
Vol. 5. IBM Journal of Research and Development.
- Landsberg, P. T. (1990). *Uncertainty and measurement Quantum Theory Without
Reduction*. M Cini and J-M Lévy-Leblond, Bristol.
- Lukin, M.D. e Imamoğlu, A. (2000). Physical.
- Maassen, H. y Uffink, J. (1988). Phys.
- Majerník, V. y Opatrny, T. (1996). J. phys. a: Math.
- Majerník, V. y Richterek, L. (1997a). J. phys. a: Math. gen.
- Majerník, V. y Richterek, L. (1997b). Phys.
- Mamojka, B. (1974). Int. j. theor. phys.
- Meglicki, Z. (2008). *Quantum Computing without Magic: Devices*. The MIT
Press.
- Merzbacher, E. (1967). *Quantum Mechanics*, (7 ed.). Wiley.
- Molero, X. (2016). *Un viaje a la historia de la informática*. Politécnica de Valen-
cia, España.

- Nesbet, R. K. (1958). *Phys. Rev.*, pp. 87.
- Nielsen, M. y Chuang, I. (2010). *Quantum Computation and Quantum Information*, (10th anniversary ed.). Cambridge University Press.
- Orlowski, A. (1997). Information entropy and squeezing of quantum fluctuations.
- Romera, E. y de los Santos, F. (2007). *Phys.*
- Sanchez-Ruiz, J. (1993). *Phys.*
- Schumacher, B. (1995). Quantum coding. *Physical*, 51, 2738–2745.
- Sen, K. (2005). *Chem. phys.*
- Shannon, C. (1993). *BellSyst. Tech Reprinted in: C.E. Shannon, Claude Elwood Shannon: Collected Papers*. IEEE Press, New York.
- Soberanes, F. y Ávila, M. (2019). Operador potencia como testigo de la decoherencia en la ejecución de la compuerta de toffoli en una computadora cuántica de diamante. 29.
- Terhal, B. y Vollbrecht, K. (2000). *Phys.rev.*
- Toffoli, T. (1980). *Reversible Computing*. MIT Technical Report MIT/LCS/TM.
- Toffoli, T. y Margolus, N. (1987). *Cellular Automata Machines: A New Environment for Modelling*. The MIT Press.
- Uhlmann, A. (1976). *The Transition Probability in the Space of Álgebra*. Reports on Mathematica Physica.

- Vajda, I. (1982). *Theory of Information and Statistical Decisions*. Alfa: Bratislava.
- Vollbrecht, K. y Werner, R. (2001). Quantify entanglement.
- Von Neumann, J. (1927). *hermodynamik quantum mechanischer Gesamheiten*. Gött. Nach.
- Von Neumann, J. (1932). *Mathematischen Grundlagender Quantemmechanik*. English translation: *Mathematical foundations of quantum mechanics*, Dover, New York, 1954, Berlin.
- Wolfram, S. (1997). *Mathematica, System for Doing Mathematics by Computer*. Addison-Wesley, Redwood City, CA.
- Wootters, W. (1998). Phys.rev.
- Yáñez-Navarro, G., Sun, G., Dytrich, T., Launey, K., Dong, S., y Jerry, J. (2014). Phys.
- Zeng, B. y Zhou, D.-L. (2019). *Quantum Information Meets Quantum Matter*.
- Zygelman, B. (2018). *A First Introduction to Quantum Computing and Information*. University of Nevada.

Apéndice A

Anexos

A.1. Operaciones en Maple

A.1.1. Dos qubits

```

de := 0.8
                                0.8
conc := {diff(D0(t), t) = (-I·D0(t)·de), diff(D1(t), t) = (-2·I·D2(t)·A + I·D1(t)·de),
         diff(D2(t), t) = (-2·I·D1(t)·A + I·D2(t)·de), diff(D3(t), t) = (-D3(t)·de), D0(0)
         = 0, D1(0) = 1, D2(0) = 0, D3(0) = 0}
{D0(0) = 0, D1(0) = 1, D2(0) = 0, D3(0) = 0,  $\frac{d}{dt} D0(t) = -0.81D0(t)$ ,  $\frac{d}{dt} D1(t)$ 
  =  $-1.01D2(t) + 0.81D1(t)$ ,  $\frac{d}{dt} D2(t) = -1.01D1(t) + 0.81D2(t)$ ,  $\frac{d}{dt} D3(t) =$ 
  -0.8·D3(t)}
dsol1 := dsolve(conc, numeric, method = taylorseries, output = listprocedure, abserr
              = 1.1·10-20)
[t = proc(t) ... end proc, D0(t) = proc(t) ... end proc, D1(t) = proc(t)
...
end proc, D2(t) = proc(t) ... end proc, D3(t) = proc(t) ... end proc]
dsol1D0 := eval(D0(t), dsol1);
                                proc(t) ... end proc
dsol1D1 := eval(D1(t), dsol1);
                                proc(t) ... end proc
dsol1D2 := eval(D2(t), dsol1);
                                proc(t) ... end proc
dsol1D3 := eval(D3(t), dsol1);
                                proc(t) ... end proc
plots[odeplot](dsol1, [[t, D0(t)·conjugate(D0(t)) + D1(t)·conjugate(D1(t)) + D2(t)
·conjugate(D2(t)) + D3(t)·conjugate(D3(t))], [t, 0], [t, 2]], 0..5, thickness = 3, title
= "", legend = [typeset("%1|", d02 + d12 + d22 + d32), "", "", ""], titlefont = ["ARIAL",
15], labels = ["T tiempo", "P Probabilidad"], labeldirections = ["horizontal",
"vertical"], labelfont = ["HELVETICA", 14], linestyle = [solid], axesfont
= ["HELVETICA", "ROMAN", 10], legendstyle = [font = ["HELVETICA", 12], location
= right]);

```

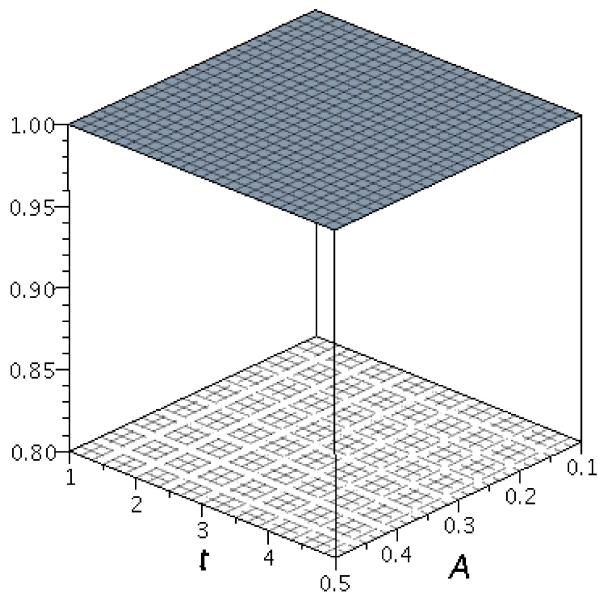
$de := 0.8$ 0.8 (1)

$c1 := \text{abs}((2 \cdot \cos(de \cdot t) \cdot \cos(de \cdot t) - 1) \cdot (1 - 2 \cdot \cos(2 \cdot a \cdot t) \cdot \cos(2 \cdot a \cdot t)) - 4 \cdot \cos(2 \cdot a \cdot t) \cdot \sin(2 \cdot a \cdot t) \cdot \cos(de \cdot t) \cdot \sin(de \cdot t) + 2 \cdot I \cdot (\cos(2 \cdot a \cdot t) \cdot \sin(2 \cdot a \cdot t) \cdot (2 \cdot \cos(de \cdot t) \cdot \cos(de \cdot t) - 1) - \cos(de \cdot t) \cdot \sin(de \cdot t) \cdot (2 \cdot \cos(2 \cdot a \cdot t) \cdot \cos(2 \cdot a \cdot t) - 1)))$

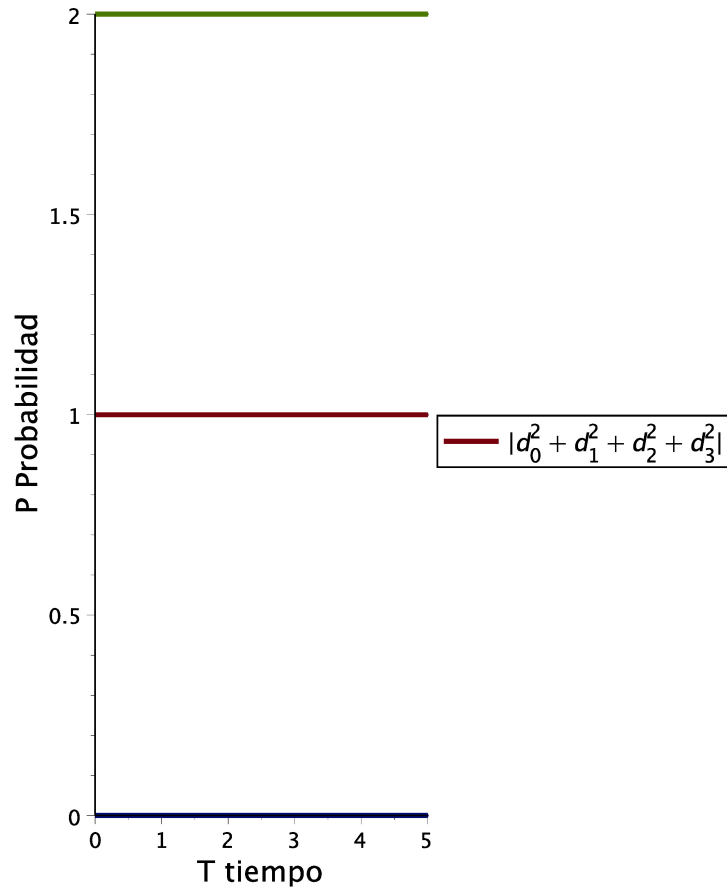
$|- (2 \cos(0.8 t)^2 - 1) (1 - 2 \cos(2 a t)^2)$ (2)

$+ 4 \cos(2 a t) \sin(2 a t) \cos(0.8 t) \sin(0.8 t)$
 $- 2 I (\cos(2 a t) \sin(2 a t) (2 \cos(0.8 t)^2 - 1)$
 $- \cos(0.8 t) \sin(0.8 t) (2 \cos(2 a t)^2 - 1))|$

$\text{plot3d}(\{c1, 0.8\}, a = 0.1..0.5, t = 1..5, \text{color} = [\text{"white"}, \text{"SlateGrey"}], \text{labels} = [A, t, \text{Concurrencia}], \text{labeldirections} = [\text{"horizontal"}, \text{"horizontal"}, \text{"vertical"}], \text{labelfont} = [\text{"HELVETICA"}, 16], \text{linestyle} = [\text{longdash}, \text{solid}], \text{axesfont} = [\text{"HELVETICA"}, \text{"ROMAN"}, 10])$

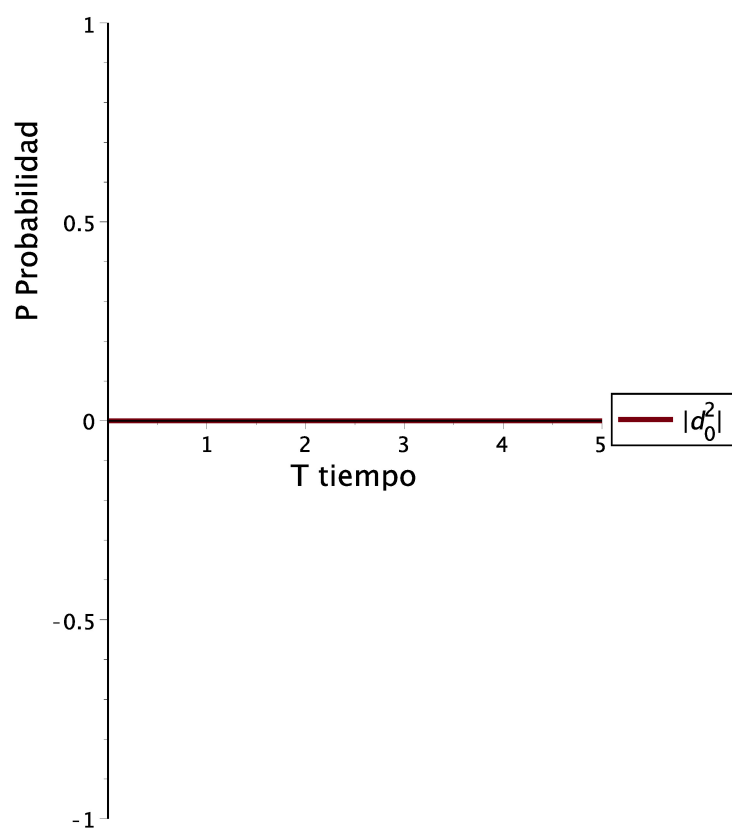


$A := 0.5$ 0.5 (3)

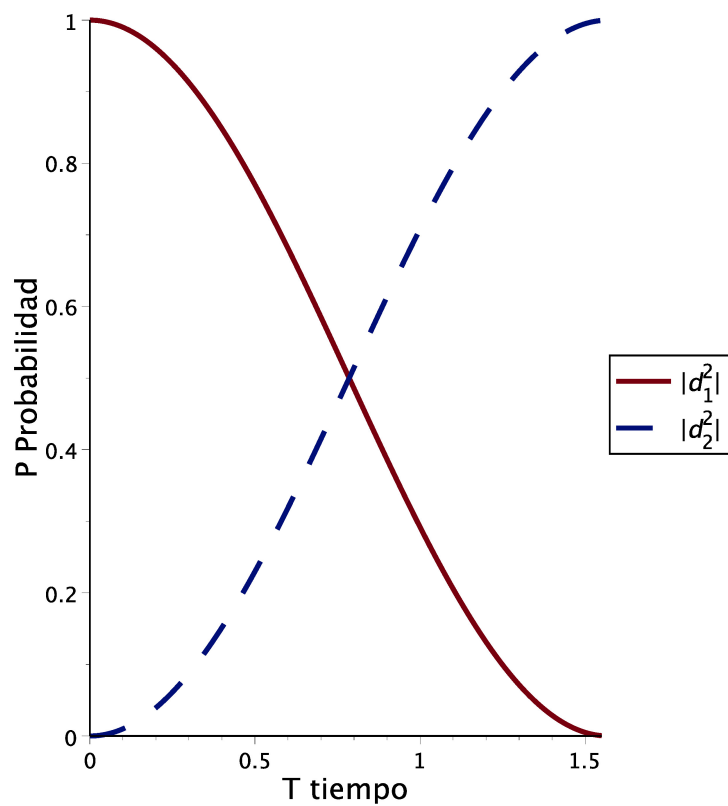


```
plots[odeplot](dsol1, [[t, D0(t)·conjugate(D0(t))], 0..5, thickness = 3, title = "", legend
= [typeset("%1|", a_0^2)], titlefont = ["ARIAL", 15], labels = ["T tiempo",
"P Probabilidad"], labeldirections = ["horizontal", "vertical"], labelfont
= ["HELVETICA", 14], linestyle = [solid], axesfont = ["HELVETICA", "ROMAN", 10],
```

```
legendstyle = [font = ["HELVETICA", 12], location = right]);
```



```
plots[odeplot](dsol1, [[t, D1(t)·conjugate(D1(t)), [t, D2(t)·conjugate(D2(t))], 0
..1.55, thickness = 3, title = "", legend = [typeset("|%1| ", d_1^2), typeset("|%1| ", d_2^2)],
titlefont = ["ARIAL", 15], labels = ["T tiempo", "P Probabilidad"], labeldirections
= ["horizontal", "vertical"], labelfont = ["HELVETICA", 14], linestyle = [solid,
spacedash], axesfont = ["HELVETICA", "ROMAN", 10], legendstyle = [font
= ["HELVETICA", 12], location = right]);
```

```
plots[odeplot](dsol1, [[t, D3(t)·conjugate(D3(t))], 0..5, thickness = 3, title = "", legend
= [typeset("%1|", a3^2)], titlefont = ["ARIAL", 15], labels = ["T tiempo",
"P Probabilidad"], labeldirections = ["horizontal", "vertical"], labelfont
= ["HELVETICA", 14], linestyle = [solid], axesfont = ["HELVETICA", "ROMAN", 10],
legendstyle = [font = ["HELVETICA", 12], location = right]);
```

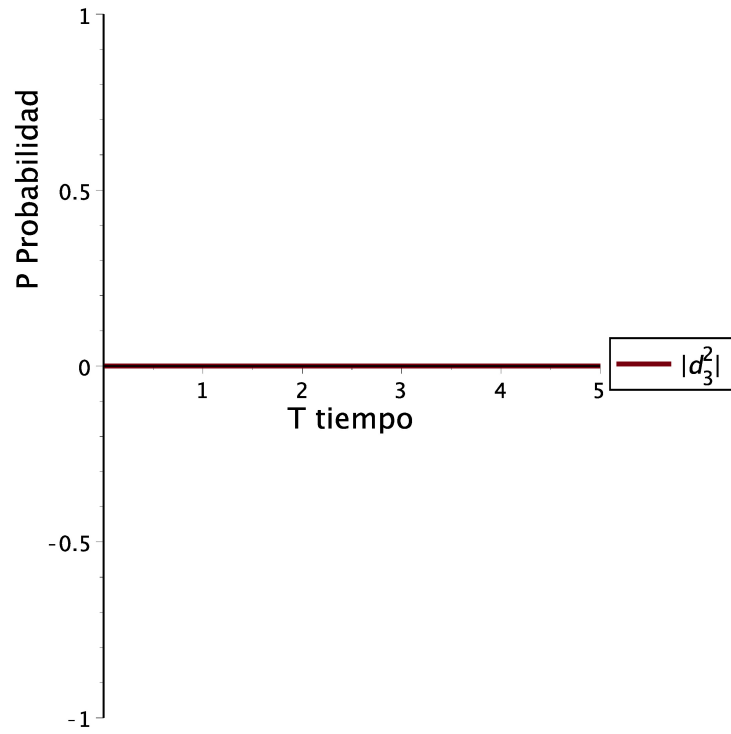


Figura A.1: Sistema de dos qubits

A.1.2. Tres qubits

$$r := 1.5; \quad 1.5$$

$$b := 1.2; \quad 1.2 \quad (2)$$

$$w1 := r \cdot b; \quad 1.80 \quad (3)$$

$$w2 := r \cdot w1; \quad 2.700 \quad (4)$$

$$w3 := r \cdot w2; \quad 4.0500 \quad (5)$$

$$J := 0.01; \quad 0.01 \quad (6)$$

$$J1 := \frac{J}{8}; \quad 0.001250000000 \quad (7)$$

$$om := 0.01; \quad 0.01 \quad (8)$$

$$u1 := \frac{3.1415}{2}; \quad 1.570750000 \quad (9)$$

$$dsys1 := \left\{ \begin{aligned} &diff(D0(t), t) = \left((I \cdot w1 + I \cdot w2 + I \cdot w3 - I \cdot 2 \cdot J - I \cdot J1) \cdot D0(t) + I \cdot \frac{om}{2} \cdot \exp(I \cdot (w1 \cdot t \right. \\ &\quad \left. + u1)) \cdot D1(t) + I \cdot \frac{om}{2} \cdot \exp(I \cdot (w2 \cdot t + u1)) \cdot D2(t) + I \cdot \frac{om}{2} \cdot \exp(I \cdot (w3 \cdot t + u1)) \cdot D4(t) \right) \\ &, diff(D1(t), t) = \left(I \cdot \frac{om}{2} \cdot \exp(-I \cdot (w1 \cdot t + u1)) \cdot D0(t) + (-I \cdot w1 + I \cdot w2 + I \cdot w3 - I \cdot J1) \right. \\ &\quad \left. \cdot D1(t) + I \cdot \frac{om}{2} \cdot \exp(I \cdot (w2 \cdot t + u1)) \cdot D3(t) + I \cdot \frac{om}{2} \cdot \exp(I \cdot (w3 \cdot t + u1)) \cdot D5(t) \right), \\ &diff(D2(t), t) = \left(I \cdot \frac{om}{2} \cdot \exp(-I \cdot (w2 \cdot t + u1)) \cdot D0(t) + (I \cdot w1 - I \cdot w2 + I \cdot w3 + I \cdot 2 \cdot J - I \right. \\ &\quad \left. \cdot J1) \cdot D2(t) + I \cdot \frac{om}{2} \cdot \exp(I \cdot (w1 \cdot t + u1)) \cdot D3(t) + I \cdot \frac{om}{2} \cdot \exp(I \cdot (w3 \cdot t + u1)) \cdot D6(t) \right), \\ &diff(D3(t), t) = \left(I \cdot \frac{om}{2} \cdot \exp(-I \cdot (w2 \cdot t + u1)) \cdot D1(t) + I \cdot \frac{om}{2} \cdot \exp(-I \cdot (w1 \cdot t + u1)) \right. \\ &\quad \left. \cdot D2(t) + (-I \cdot w1 - I \cdot w2 + I \cdot w3 + I \cdot J1) \cdot D3(t) + I \cdot \frac{om}{2} \cdot \exp(I \cdot (w3 \cdot t + u1)) \cdot D7(t) \right), \\ &diff(D4(t), t) = \left((I \cdot w1 + I \cdot w2 - I \cdot w3 + I \cdot J1) \cdot D4(t) + I \cdot \frac{om}{2} \cdot \exp(I \cdot (w1 \cdot t + u1)) \right. \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned}
 & \cdot D5(t) + I \frac{om}{2} \cdot \exp(I(w2 \cdot t + u1)) \cdot D6(t) + I \frac{om}{2} \cdot \exp(-I(w3 \cdot t + u1)) \cdot D0(t) \Big), \\
 & \text{diff}(D5(t), t) = \left((-Iw1 + Iw2 - Iw3 + I2 \cdot J - IJ1) \cdot D5(t) + I \frac{om}{2} \cdot \exp(-I(w1 \cdot t \right. \\
 & \left. + u1)) \cdot D4(t) + I \frac{om}{2} \cdot \exp(I(w2 \cdot t + u1)) \cdot D7(t) + I \frac{om}{2} \cdot \exp(-I(w3 \cdot t + u1)) \right. \\
 & \left. \cdot D1(t) \right), \text{diff}(D6(t), t) = \left((Iw1 - Iw2 - Iw3 + IJ1) \cdot D6(t) + I \frac{om}{2} \cdot \exp(I(w1 \cdot t \right. \\
 & \left. + u1)) \cdot D7(t) + I \frac{om}{2} \cdot \exp(-I(w2 \cdot t + u1)) \cdot D4(t) + I \frac{om}{2} \cdot \exp(-I(w3 \cdot t + u1)) \right. \\
 & \left. \cdot D2(t) \right), \text{diff}(D7(t), t) = \left((-Iw1 - Iw2 - Iw3 - I2 \cdot J - IJ1) \cdot D7(t) + I \frac{om}{2} \cdot \exp(-I \right. \\
 & \left. \cdot (w1 \cdot t + u1)) \cdot D6(t) + I \frac{om}{2} \cdot \exp(-I(w2 \cdot t + u1)) \cdot D5(t) + I \frac{om}{2} \cdot \exp(-I(w3 \cdot t + u1)) \right. \\
 & \left. \cdot D3(t) \right), D0(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}, D1(0) = 0, D2(0) = 0, D3(0) = 0, D4(0) = 0, D5(0) = 0, \\
 & D6(0) = 0, D7(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Big\} \\
 & \left\{ D0(0) = \frac{1}{2} \sqrt{2}, D1(0) = 0, D2(0) = 0, D3(0) = 0, D4(0) = 0, D5(0) = 0, D6(0) \right. \\
 & = 0, D7(0) = \frac{1}{2} \sqrt{2}, \frac{d}{dt} D0(t) = 8.528750000 ID0(t) \\
 & + 0.005000000000 I e^{I(1.80t + 1.570750000)} D1(t) \\
 & + 0.005000000000 I e^{I(2.700t + 1.570750000)} D2(t) \\
 & + 0.005000000000 I e^{I(4.0500t + 1.570750000)} D4(t), \frac{d}{dt} D1(t) \\
 & = 0.005000000000 I e^{-I(1.80t + 1.570750000)} D0(t) + 4.948750000 ID1(t) \\
 & + 0.005000000000 I e^{I(2.700t + 1.570750000)} D3(t) \\
 & + 0.005000000000 I e^{I(4.0500t + 1.570750000)} D5(t), \frac{d}{dt} D2(t) \\
 & = 0.005000000000 I e^{-I(2.700t + 1.570750000)} D0(t) + 3.168750000 ID2(t) \\
 & + 0.005000000000 I e^{I(1.80t + 1.570750000)} D3(t) \\
 & + 0.005000000000 I e^{I(4.0500t + 1.570750000)} D6(t), \frac{d}{dt} D3(t)
 \end{aligned}$$

```

= 0.005000000000 Ie-I(2.700 t + 1.570750000) D1(t)
+ 0.005000000000 Ie-I(1.80 t + 1.570750000) D2(t) - 0.4487500000 I D3(t)
+ 0.005000000000 IeI(4.0500 t + 1.570750000) D7(t),  $\frac{d}{dt}$  D4(t)
= 0.4512500000 I D4(t) + 0.005000000000 IeI(1.80 t + 1.570750000) D5(t)
+ 0.005000000000 IeI(2.700 t + 1.570750000) D6(t)
+ 0.005000000000 Ie-I(4.0500 t + 1.570750000) D0(t),  $\frac{d}{dt}$  D5(t) =
-3.131250000 I D5(t) + 0.005000000000 Ie-I(1.80 t + 1.570750000) D4(t)
+ 0.005000000000 IeI(2.700 t + 1.570750000) D7(t)
+ 0.005000000000 Ie-I(4.0500 t + 1.570750000) D1(t),  $\frac{d}{dt}$  D6(t) =
-4.948750000 I D6(t) + 0.005000000000 IeI(1.80 t + 1.570750000) D7(t)
+ 0.005000000000 Ie-I(2.700 t + 1.570750000) D4(t)
+ 0.005000000000 Ie-I(4.0500 t + 1.570750000) D2(t),  $\frac{d}{dt}$  D7(t) =
-8.571250000 I D7(t) + 0.005000000000 Ie-I(1.80 t + 1.570750000) D6(t)
+ 0.005000000000 Ie-I(2.700 t + 1.570750000) D5(t)
+ 0.005000000000 Ie-I(4.0500 t + 1.570750000) D3(t) }
dsol1 := dsolve(dsys1, numeric, method = taylorseries, output = listprocedure, abserr
= 1.1·10-20);
[t = proc(t) ... end proc, D0(t) = proc(t) ... end proc, D1(t) = proc(t)          (11)
...
end proc, D2(t) = proc(t) ... end proc, D3(t) = proc(t) ... end proc, D4(t) =
proc(t)
...
end proc, D5(t) = proc(t) ... end proc, D6(t) = proc(t) ... end proc, D7(t) =
proc(t)
...
end proc]

```

$$dsol1D0 := eval(D0(t), dsol1); \quad \text{proc}(t) \dots \text{end proc} \quad (12)$$

$$dsol1D1 := eval(D1(t), dsol1); \quad \text{proc}(t) \dots \text{end proc} \quad (13)$$

$$dsol1D2 := eval(D2(t), dsol1); \quad \text{proc}(t) \dots \text{end proc} \quad (14)$$

$$dsol1D3 := eval(D3(t), dsol1); \quad \text{proc}(t) \dots \text{end proc} \quad (15)$$

$$dsol1D4 := eval(D4(t), dsol1); \quad \text{proc}(t) \dots \text{end proc} \quad (16)$$

$$dsol1D5 := eval(D5(t), dsol1); \quad \text{proc}(t) \dots \text{end proc} \quad (17)$$

$$dsol1D6 := eval(D6(t), dsol1); \quad \text{proc}(t) \dots \text{end proc} \quad (18)$$

$$dsol1D7 := eval(D7(t), dsol1); \quad \text{proc}(t) \dots \text{end proc} \quad (19)$$

$$C1 := D0(t) \cdot D0(t) \cdot D7(t) \cdot D7(t) + D1(t) \cdot D1(t) \cdot D6(t) \cdot D6(t) + D2(t) \cdot D2(t) \cdot D5(t) \cdot D5(t) + D3(t) \cdot D3(t) \cdot D4(t) \cdot D4(t);$$

$$D0(t)^2 D7(t)^2 + D1(t)^2 D6(t)^2 + D2(t)^2 D5(t)^2 + D3(t)^2 D4(t)^2 \quad (20)$$

$$C1C := \text{conjugate}(D0(t) \cdot D0(t) \cdot D7(t) \cdot D7(t)) + \text{conjugate}(D1(t) \cdot D1(t) \cdot D6(t) \cdot D6(t)) + \text{conjugate}(D2(t) \cdot D2(t) \cdot D5(t) \cdot D5(t)) + \text{conjugate}(D3(t) \cdot D3(t) \cdot D4(t) \cdot D4(t));$$

$$D0(t)^2 D7(t)^2 + D1(t)^2 D6(t)^2 + D2(t)^2 D5(t)^2 + D3(t)^2 D4(t)^2 \quad (21)$$

$$C2 := D0(t) \cdot D7(t) \cdot D3(t) \cdot D4(t) + D0(t) \cdot D7(t) \cdot D5(t) \cdot D2(t) + D0(t) \cdot D7(t) \cdot D6(t) \cdot D1(t) + D3(t) \cdot D4(t) \cdot D5(t) \cdot D2(t) + D3(t) \cdot D4(t) \cdot D6(t) \cdot D1(t) + D5(t) \cdot D2(t) \cdot D6(t) \cdot D1(t);$$

$$D0(t) D7(t) D3(t) D4(t) + D0(t) D7(t) D5(t) D2(t) + D0(t) D7(t) D6(t) D1(t) + D3(t) D4(t) D5(t) D2(t) + D3(t) D4(t) D6(t) D1(t) + D5(t) D2(t) D6(t) D1(t) \quad (22)$$

$$C2C := \text{conjugate}(D0(t) \cdot D7(t) \cdot D3(t) \cdot D4(t)) + \text{conjugate}(D0(t) \cdot D7(t) \cdot D5(t) \cdot D2(t)) + \text{conjugate}(D0(t) \cdot D7(t) \cdot D6(t) \cdot D1(t)) + \text{conjugate}(D3(t) \cdot D4(t) \cdot D5(t) \cdot D2(t)) + \text{conjugate}(D3(t) \cdot D4(t) \cdot D6(t) \cdot D1(t)) + \text{conjugate}(D5(t) \cdot D2(t) \cdot D6(t) \cdot D1(t));$$

$$D0(t) D7(t) D3(t) D4(t) + D0(t) D7(t) D5(t) D2(t) + D0(t) D7(t) D6(t) D1(t) + D3(t) D4(t) D5(t) D2(t) + D3(t) D4(t) D6(t) D1(t) + D5(t) D2(t) D6(t) D1(t) \quad (23)$$

$$C3 := D0(t) \cdot D6(t) \cdot D5(t) \cdot D3(t) + D7(t) \cdot D1(t) \cdot D2(t) \cdot D4(t);$$

$$D0(t) D6(t) D5(t) D3(t) + D7(t) D1(t) D2(t) D4(t) \quad (24)$$

$$C3C := \text{conjugate}(D0(t) \cdot D6(t) \cdot D5(t) \cdot D3(t)) + \text{conjugate}(D7(t) \cdot D1(t) \cdot D2(t) \cdot D4(t));$$

$$D0(t) D6(t) D5(t) D3(t) + D7(t) D1(t) D2(t) D4(t) \quad (25)$$

$$T3 := 4 \cdot \sqrt{(C1 - 2 \cdot C2 + 4 \cdot C3) \cdot (C1C - 2 \cdot C2C + 4 \cdot C3C)};$$

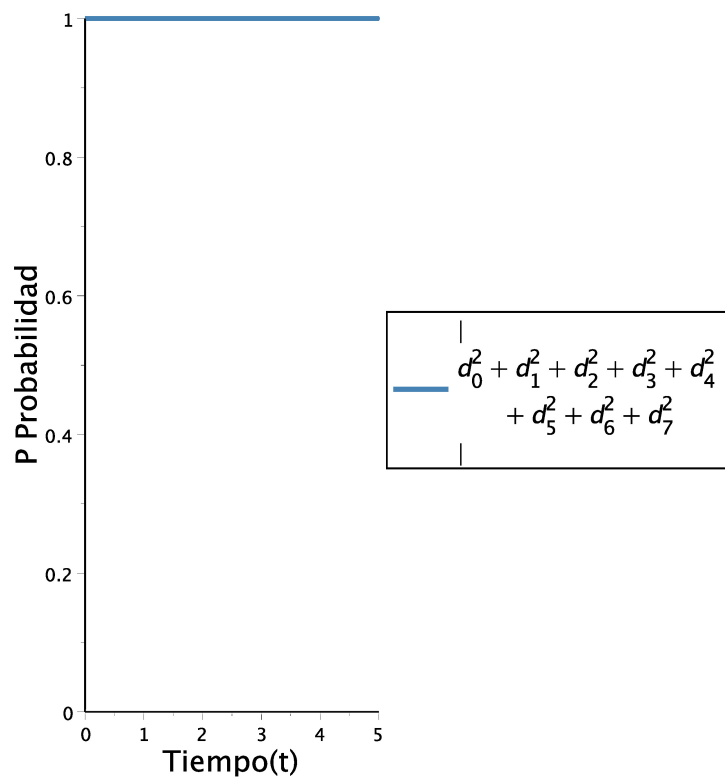
$$4 \left((D0(t)^2 D7(t)^2 + D1(t)^2 D6(t)^2 + D2(t)^2 D5(t)^2 + D3(t)^2 D4(t)^2) - 2 D0(t) D7(t) D3(t) D4(t) - 2 D0(t) D7(t) D5(t) D2(t) - 2 D0(t) D7(t) D6(t) D1(t) - 2 D3(t) D4(t) D5(t) D2(t) \right) \quad (26)$$

$$\begin{aligned} & -2 D3(t) D4(t) D6(t) D1(t) - 2 D5(t) D2(t) D6(t) D1(t) \\ & + 4 D0(t) D6(t) D5(t) D3(t) + 4 D7(t) D1(t) D2(t) D4(t) \left(D0(t)^2 D7(t)^2 + \right. \\ & \left. \frac{D1(t)^2 D6(t)^2 + D2(t)^2 D5(t)^2 + D3(t)^2 D4(t)^2 - 2 D0(t) D7(t) D3(t) D4(t)}{D1(t)^2 D6(t)^2 + D2(t)^2 D5(t)^2 + D3(t)^2 D4(t)^2 - 2 D0(t) D7(t) D3(t) D4(t)} \right. \\ & - 2 D0(t) D7(t) D5(t) D2(t) - 2 D0(t) D7(t) D6(t) D1(t) - 2 \\ & \left. \frac{D3(t) D4(t) D5(t) D2(t) - 2 D3(t) D4(t) D6(t) D1(t) - 2}{D5(t) D2(t) D6(t) D1(t) + 4 D0(t) D6(t) D5(t) D3(t) + 4} \right. \\ & \left. \frac{D7(t) D1(t) D2(t) D4(t)}{D7(t) D1(t) D2(t) D4(t)} \right)^{1/2} \end{aligned}$$

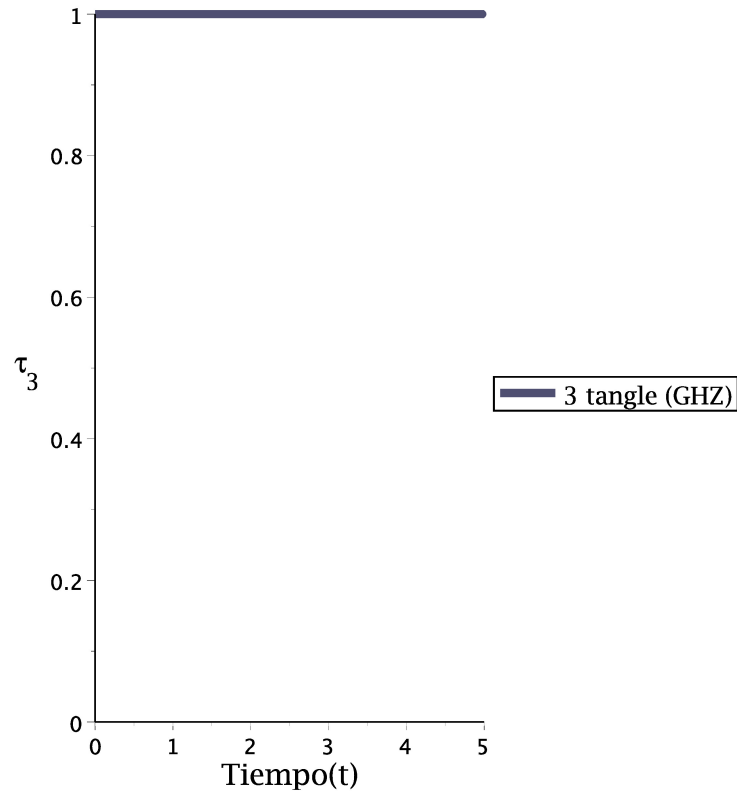
$$\begin{aligned} t3 &:= 4 \cdot \text{abs}(C1 - 2 \cdot C2 + 4 \cdot C3); \\ 4 & |D0(t)^2 D7(t)^2 + D1(t)^2 D6(t)^2 + D2(t)^2 D5(t)^2 + D3(t)^2 D4(t)^2 \\ & - 2 D0(t) D7(t) D3(t) D4(t) - 2 D0(t) D7(t) D5(t) D2(t) \\ & - 2 D0(t) D7(t) D6(t) D1(t) - 2 D3(t) D4(t) D5(t) D2(t) \\ & - 2 D3(t) D4(t) D6(t) D1(t) - 2 D5(t) D2(t) D6(t) D1(t) \\ & + 4 D0(t) D6(t) D5(t) D3(t) + 4 D7(t) D1(t) D2(t) D4(t)| \end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned} tt &:= \text{sqrt}(t3); \\ 2 & (|D0(t)^2 D7(t)^2 + D1(t)^2 D6(t)^2 + D2(t)^2 D5(t)^2 + D3(t)^2 D4(t)^2 \\ & - 2 D0(t) D7(t) D3(t) D4(t) - 2 D0(t) D7(t) D5(t) D2(t) \\ & - 2 D0(t) D7(t) D6(t) D1(t) - 2 D3(t) D4(t) D5(t) D2(t) \\ & - 2 D3(t) D4(t) D6(t) D1(t) - 2 D5(t) D2(t) D6(t) D1(t) \\ & + 4 D0(t) D6(t) D5(t) D3(t) + 4 D7(t) D1(t) D2(t) D4(t)|)^{1/2} \end{aligned} \tag{28}$$

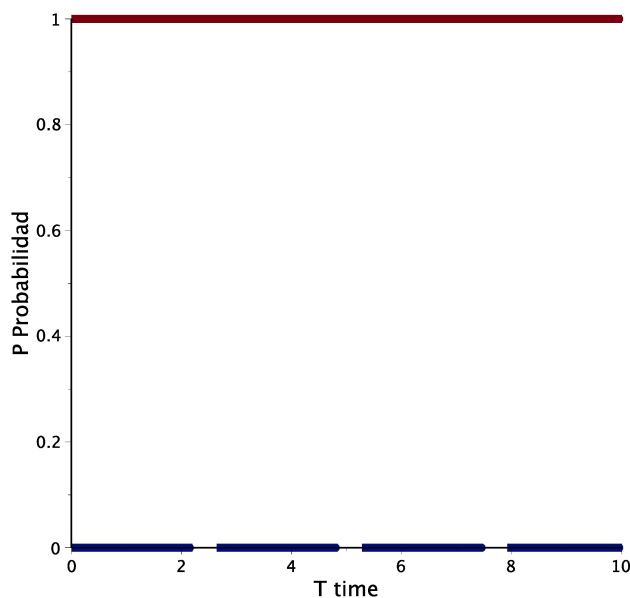
```
plots[odeplot](dsol1, [[t, D0(t)·conjugate(D0(t)) + D1(t)·conjugate(D1(t)) + D2(t)
·conjugate(D2(t)) + D3(t)·conjugate(D3(t)) + D4(t)·conjugate(D4(t)) + D5(t)
·conjugate(D5(t)) + D6(t)·conjugate(D6(t)) + D7(t)·conjugate(D7(t))], [t, 0], [t,
0]], 0..5, thickness = 3, title = "", legend = [typeset("%1", d_0^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2
+ d_5^2 + d_6^2 + d_7^2), " ", " "], titlefont = ["ARIAL", 15], labels = ["Tiempo(t)",
"P Probabilidad"], labeldirections = ["horizontal", "vertical"], labelfont
= ["HELVETICA", 14], linestyle = [solid], axesfont = ["HELVETICA", "ROMAN", 9],
legendstyle = [font = ["HELVETICA", 12], location = right], color = ["SteelBlue",
white, white]);
```



```
plots[odeplot](dsol1, [[t, tt], [t, 0]], 0..5, thickness = 5, title = "", legend
= ["3 tangle (GHZ)", ""], titlefont = ["ARIAL", 15], labels = ["Tiempo(t)",
typeset( $\tau_3$ )], labeldirections = ["horizontal", "horizontal"], labelfont = ["ARIAL",
14], linestyle = [solid, solid], axesfont = ["HELVETICA", "ROMAN", 10], legendstyle
= [font = ["HELVETICA", 12], location = right], color = ["Nautical GrayViolet",
white]);
```

```
plots[odeplot](dsol1, [[t, T3], [t, 0]], 0..10, thickness = 5, title = "", legend
= ["3 tangle"], titlefont = ["ARIAL", 15], labels = ["T time", "P Probabilidad"],
labeldirections = ["horizontal", "vertical"], labelfont = ["HELVETICA", 10], linestyle
= [solid, longdash], axesfont = ["HELVETICA", "ROMAN", 8], legendstyle = [font
= ["HELVETICA", 9], location = right]);
```



$$\begin{aligned}
 dsys2 := & \left\{ \begin{aligned}
 & \text{diff}(D0(t), t) = \left((I \cdot w1 + I \cdot w2 + I \cdot w3 - I \cdot 2 \cdot J - I \cdot J1) \cdot D0(t) + I \cdot \frac{om}{2} \cdot \exp(I \cdot (w1 \cdot t \right. \\
 & \left. + u1)) \cdot D1(t) + I \cdot \frac{om}{2} \cdot \exp(I \cdot (w2 \cdot t + u1)) \cdot D2(t) + I \cdot \frac{om}{2} \cdot \exp(I \cdot (w3 \cdot t + u1)) \cdot D4(t) \right) \\
 & , \text{diff}(D1(t), t) = 0, \text{diff}(D2(t), t) = 0, \text{diff}(D3(t), t) = 0, \text{diff}(D4(t), t) = 0, \\
 & \text{diff}(D5(t), t) = 0, \text{diff}(D6(t), t) = 0, \text{diff}(D7(t), t) = \left((-I \cdot w1 - I \cdot w2 - I \cdot w3 - I \cdot 2 \cdot J - I \right. \\
 & \left. \cdot J1) \cdot D7(t) + I \cdot \frac{om}{2} \cdot \exp(-I \cdot (w1 \cdot t + u1)) \cdot D6(t) + I \cdot \frac{om}{2} \cdot \exp(-I \cdot (w2 \cdot t + u1)) \cdot D5(t) \right. \\
 & \left. + I \cdot \frac{om}{2} \cdot \exp(-I \cdot (w3 \cdot t + u1)) \cdot D3(t) \right), D0(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}, D1(0) = 0, D2(0) = 0, D3(0) \\
 & = 0, D4(0) = 0, D5(0) = 0, D6(0) = 0, D7(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left. \right\} \\
 & \left\{ D0(0) = \frac{1}{2} \sqrt{2}, D1(0) = 0, D2(0) = 0, D3(0) = 0, D4(0) = 0, D5(0) = 0, D6(0) \right\} \quad (29)
 \end{aligned}
 \right.
 \end{aligned}$$

```

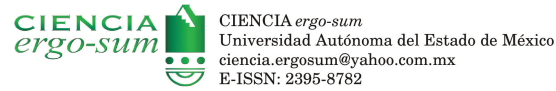
= 0, D7(0) =  $\frac{1}{2} \sqrt{2}$ ,  $\frac{d}{dt} D0(t) = 8.528750000 D0(t)$ 
+ 0.005000000000  $Ie^{I(1.80t + 1.570750000)}$  D1(t)
+ 0.005000000000  $Ie^{I(2.700t + 1.570750000)}$  D2(t)
+ 0.005000000000  $Ie^{I(4.0500t + 1.570750000)}$  D4(t),  $\frac{d}{dt} D1(t) = 0$ ,  $\frac{d}{dt} D2(t)$ 
= 0,  $\frac{d}{dt} D3(t) = 0$ ,  $\frac{d}{dt} D4(t) = 0$ ,  $\frac{d}{dt} D5(t) = 0$ ,  $\frac{d}{dt} D6(t) = 0$ ,  $\frac{d}{dt} D7(t) =$ 
-8.571250000 D7(t) + 0.005000000000  $Ie^{-I(1.80t + 1.570750000)}$  D6(t)
+ 0.005000000000  $Ie^{-I(2.700t + 1.570750000)}$  D5(t)
+ 0.005000000000  $Ie^{-I(4.0500t + 1.570750000)}$  D3(t) }
dsol2 := dsolve(dsys1, numeric, method = taylorseries, output = listprocedure, abserr
= 1.1·10-20);
[t = proc(t) ... end proc, D0(t) = proc(t) ... end proc, D1(t) = proc(t)          (30)
...
end proc, D2(t) = proc(t) ... end proc, D3(t) = proc(t) ... end proc, D4(t) =
proc(t)
...
end proc, D5(t) = proc(t) ... end proc, D6(t) = proc(t) ... end proc, D7(t) =
proc(t)
...
end proc]

dsol1D0 := eval(D0(t), dsol2);
proc(t) ... end proc          (31)
dsol1D1 := eval(D1(t), dsol2);
proc(t) ... end proc          (32)
dsol1D2 := eval(D2(t), dsol1);
proc(t) ... end proc          (33)
dsol1D3 := eval(D3(t), dsol1);
proc(t) ... end proc          (34)
dsol1D4 := eval(D4(t), dsol1);
proc(t) ... end proc          (35)
dsol1D5 := eval(D5(t), dsol1);
proc(t) ... end proc          (36)
dsol1D6 := eval(D6(t), dsol1);
proc(t) ... end proc          (37)

```

A.2. Publicaciones

En esta sección se muestran los artículos publicados durante la investigación.



Reseña de una interpretación de discordia cuántica

Ávila Aoki, Manuel; Soberanes Martín, Fabián
Reseña de una interpretación de discordia cuántica
CIENCIA *ergo-sum*, vol. 26, núm. 2, julio-octubre 2019 | e57
Universidad Autónoma del Estado de México, México
Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivar 4.0 Internacional.

Ávila Aoki, M. y Soberanes Martín, F. (2019). Reseña de una interpretación de discordia cuántica. CIENCIA *ergo-sum*, 26(2). <https://doi.org/10.30878/ces.v26n2a11>



PDF generado por Redalyc a partir de XML-JATS4R
Proyecto académico sin fines de lucro, desarrollado bajo la iniciativa de acceso abierto



Figura A.2: Primera página artículo 1: Reseña de una interpretación de discordia cuántica

Operador potencia como testigo de la decoherencia en la ejecución de la compuerta de Toffoli en una computadora cuántica de diamante

Power operator as witness of the decoherence in the execution of the Toffoli gate in a diamond quantum computer

Fabián Soberanes¹, Manuel Ávila²

¹ Tecnológico de Estudios Superiores de Chalco (Tesch), Tlapala, C.P. 56600, Chalco, Estado de México, México.

² Centro Universitario, Campus Valle de Chalco, Universidad Autónoma del Estado de México (UAEM), Ma. Isabel, CP 56615, Valle de Chalco, Estado de México, México.

*Autor de correspondencia

Resumen

La computadora cuántica de diamante ha sido empleada exitosamente en diversos protocolos de información cuántica. Es usado un Hamiltoniano (H) típico de 3-qubits que componen una computadora cuántica de diamante, el cual consiste de términos diagonales y pulsos de Rabi que generan el giro de los espines de la compuerta de Toffoli. De tal Hamiltoniano es derivado el operador potencia dH/dt y calculado su valor promedio como función del tiempo. Al resolver numéricamente la ecuación de Schrodinger, se demuestra que la compuerta de Toffoli no se ejecuta y que el operador potencia es testigo de la decoherencia de la ejecución de la compuerta Toffoli. Al depender el Hamiltoniano del tiempo, hay un intercambio de energía del sistema de tres qubits con el medio. Lo anterior induce la decoherencia del sistema. Se concluye que la tecnología de pulsos de Rabi tiene limitaciones.

Palabras clave: Compuerta de Toffoli; qubits; ejecución; operador potencia.

Abstract

The diamond quantum computer has been employed successfully for several quantum information protocols. A Hamiltonian (H), 3-qubits typical diamond quantum computer is used, consisting of diagonal terms and Rabi pulses that generate the spin flip of the Toffoli gate. From such a Hamiltonian, the respective power operator dH/dt is derived and its average behavior as a function of time is calculated. To solve numerically the Schrodinger equation, it is shown both that the Toffoli gate is not executed and that the power operator is witness of the decoherence of the execution of the Toffoli gate. When the Hamiltonian depends on time, there is exchange of energy of the 3-qubit system with the environment. The latter induces decoherence of the system. It is also concluded that the Rabi pulses technology has limitations.

Keywords: Toffoli gate; qubits; execution; power operator.

Recibido: 15 de octubre de 2018

Aceptado: 15 de agosto de 2019

Publicado: 6 de noviembre de 2019

Como citar: Soberanes, F., & Ávila, M. (2019). Operador potencia como testigo de la decoherencia en la ejecución de la compuerta de Toffoli en una computadora cuántica de diamante. *Acta Universitaria* 29, e2409. doi. <http://doi.org/10.15174/au.2019.2409>

Figura A.3: Primera página artículo 2: Operador potencia como testigo de la decoherencia en la ejecución de la compuerta de Toffoli en una computadora cuántica de diamante



Execution of Fredkin gate by a set of free fermions

F SOBERANES¹ and M ÁVILA²✉*

¹Technologico de Estudios Superiores de Chalco, Tlapala 56600, Chalco, Edo. Mex., Mexico

²Centro Universitario UAEM Valle de Chalco, María Isabel, 56615 Valle de Chalco, Edo. Mex., Mexico

*Corresponding author. E-mail: manvk@yahoo.com

MS received 8 August 2019; revised 2 December 2019; accepted 24 December 2019

Abstract. It is not a trivial task to answer whether a free fermion-based architecture for a quantum computer can efficiently execute basic gates such as the Fredkin gate. We show that a set of free fermions can efficiently execute Fredkin gate.

Keywords. IBM quantum computer; quantum Fredkin gate; free fermions.

PACS Nos 05.30.–d; 03.67.–a

The achievement of IBM quantum computer is due to the employment of free fermion-architecture [1–5]. Bound fermions and their relation to quantum information processing have been studied extensively in the past [6–12]. In particular, entanglement properties have been addressed. Quantum spin chains are excellent tools for studying the crucial aspects of quantum information processing such as entanglement and transference of states because several simple models can be solved analytically. There exist several efficient numerical techniques.

In order to study entanglement, Eisler and Zimboras [13] have introduced an approach based on energy currents in quantum spin chains. On the other hand, it is so clear that an operative quantum hardware such as the IBM quantum computer, whose architecture is based on free fermions, must be able to process primitive operations (gates) in an efficient way. In the present paper, it is shown that a primitive gate such as the Fredkin gate can be executed efficiently by a set of free fermions.

The paper is organised as follows: In §1 the model is introduced, in §2 the numerical results are shown while in §3, conclusions obtained from the results are discussed.

1. The model

In the present paper, the XX spin chain carrying energy currents are relevant. However, such a constraint will not allow the fermions to be free. In what follows we shall account for a set of free fermions.

The XX model for $N = 3$ fermions is defined using the following Hamiltonian:

$$H^{xx} = -S_1^x S_2^x - S_1^y S_2^y - S_2^x S_3^x - S_2^y S_3^y - hS_1^z - hS_2^z - hS_3^z, \quad (1)$$

where $\{S_a^x, S_a^y, S_a^z\}$ are the Pauli matrices and h is the transverse magnetic field. It is assumed that the Hamiltonian of eq. (1) is constrained to carry energy currents and consequently the $N = 3$ fermions of (1) are not free.

In ref. [13] it was shown that by adding an appropriate current term to eq. (1), the system becomes a set of free fermions. That is, by adding to eq. (1) the following term

$$J^E = hS_1^x S_2^y - hS_1^y S_2^x + S_2^z S_1^x S_3^x - S_2^z S_1^y S_3^y + hS_2^x S_3^y - hS_2^y S_3^x, \quad (2)$$

the resulting system is a set of free fermions [13] which are described by the Hamiltonian

$$H^E = H^{xx} - \lambda J^E, \quad (3)$$

where λ is a parameter.

On the other hand, the so-called Fredkin gate operates on three qubits and it is defined by the following transformations:

$$\begin{aligned} |000\rangle &\rightarrow |000\rangle \\ |010\rangle &\rightarrow |010\rangle \\ |110\rangle &\rightarrow |111\rangle \end{aligned}$$

Figura A.4: Primera página artículo 3: Execution of Fredkin gate by a set of free fermions

B.1. Glosario

Átomo	Partícula más pequeña de un elemento. Está formado por protones y neutrones en un núcleo rodeado de electrones.
Cuanto	Cantidad más pequeña de algo. Un cuanto de energía luminosa es el fotón.
Cuerpo negro	Es un cuerpo que absorbe cierta cantidad de energía y emite la misma cantidad de energía absorbida.

Difracción	Desviación de una onda debido a la presencia de una barrera.
Dualidad onda-partícula	Teoría que explica que la luz puede ser vista como onda o como partícula según convenga.
Ecuación de Schrödinger	Determina la energía total de la onda, los elementos que componen la ecuación indican la energía en movimiento.
Efecto fotoeléctrico	Extracción de electrones de cierto metal cuando sobre ellos incide luz.
Electrón	Partículas sub atómicas de carga negativa.
Energía	Propiedad de un objeto o sistema en virtud de la cual puede realizar trabajo; se mide en Joules.
Energía Cinética	Energía del movimiento. Es igual a la mitad del producto de la masa por el cuadrado de la velocidad.
Esfera de Bloch	Constituye una manera de visualizar y representar

geométricamente el estado de un qubit simple.

Estados de Bell

Representan los posibles estados de un entrelazamiento, es decir representan el estado cuántico de dos qubits.

Fotón

Modelo corpuscular de la radiación electromagnética, partícula que viaja con la rapidez de la luz y cuya energía está relacionada con la frecuencia en el modelo ondulatorio.

Frecuencia

Número de vibraciones por unidad de tiempo; se mide en Hertz.

Función de onda

Tiene un valor complejo y contiene toda la información que puede conocerse acerca de una partícula.

Impulso

Producto de la fuerza por el intervalo de tiempo durante el cual se ejerce.

Iones

Grupo de átomos unidos con carga eléctrica total

distinta de cero debida a la pérdida ó adquisición de electrones.

Litografía

Implica el modelado de una superficie a través de la exposición a la luz, para que los iones ó electrones, y las subsecuentes capas del material produzcan el dispositivo deseado.

Longitud de onda

Distancia entre la cima de una cresta a la cima de la siguiente cresta.

Luz coherente

Luz que tiene misma fase y frecuencia.

Momentum

Producto de la masa de un objeto por su velocidad. Es una cantidad con dirección además de magnitud.

Nanociencia

Es el estudio del fenómeno y manipulación de materiales a escala atómica, molecular y macromolecular.

Nanometrología

Ciencia encargada de las mediciones a nivel manométrico y su aplicación es fundamental

para la nanociencia y la nanotecnología.

Nanotecnología	Es el diseño, caracterización, producción y aplicación de estructuras, dispositivos y sistemas mediante el control del tamaño y la forma a escala nanométrica.
Optoelectrónica	Es la rama de la electrónica que trata con la luz.
Qubit	Elemento básico para el tratamiento de la información.
Radiación electromagnética	Transmisión de energía por medio de ondas electromagnéticas.
Spin	Propiedad física de las partículas que proporciona una medida del momento angular y de la acción de la partícula.
Teleportación cuántica	Proceso separadas mediante el cual dos personas geográficamente se quieren comunicar y emplean el uso de

superposición de qubits para lograrlo.

Vector

Flecha cuya longitud representa la magnitud de una cantidad y cuya dirección representa el ángulo de dicha cantidad.